



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه یازدهم



مرور و تثبیت پایه دهم



ویژه دانش آموزان پایه یازدهم

دفترچه پاسخ

جمعه ۱۳ شهریورماه ۱۴۰۵

- ✓ پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون
- ✓ تحلیل تمام گزینه های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده اید
- ✓ نکات و درسنامه های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال
- ✓ مشاوره تستی؛ برای یادگیری انواع روش های حل تست
- ✓ استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسه آزمون

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

دَرس	مَسْئُول دَرس	طَراحان	وِیرا سَاران
ریاضیات	حسین شفیع زاده مهرداد کیوان سید جواد نظری	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان علی منصف شکری	محسن جواهری - ندا فرهختی مآده بادان فیروز - یزدان نیک‌قدم حمیدرضا ولی‌پور - ارسلان حسنوند نوید ذکی - محمد مهدی معظمی علی اسدی
فیزیک	حسین عبدوی‌نژاد مروارید شاه‌حسینی	مروارید شاه‌حسینی - هادی حمزه‌پور شایان عابدی - کامران ابراهیمی	سپهر صادقی ایلیا فقیه میرزایی
شیمی	علی ترابی	علی ترابی - پرهام تیزپا فرهنگ امیری - طاها حق‌بین	فرهنگ امیری محمد رضا جمشیدی معید ایری - وحید فارسیان محمد دارابی‌جم



یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستند تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین. راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهاداتتون رو برامون بنویسین.

تابستون؛ سکوی پرتاب به سمت کنکور!

«تابستون رو جدی بگیر»

رفیق سلام!

رسیدیم به ایستگاه ۱۳ شهریور؛ جایی که هوا هم کم کم داره بوی پاییز رو می گیره. اگه تا الان با ما همراه بودی، یعنی تو اون بخش سخت «تغییر عادت» رو پشت سر گذاشتی. حالا دیگه تابستون اون قدرها هم که اولش فکر می کردی طولانی نیست.

از ۱۳ شهریور تا ۲۷ شهریور، از زمان های استراتژیکه؛ چون تو رو از «فاز آرامش تابستونه» می کشه بیرون و پرت می کنه توی فضای جدی «آمادگی برای سال تحصیلی» جایی که تیکه آخر از برنامه آزمون مونده.

بیا واقع بین باشیم؛ الان مغزت احتمالاً به جور «خستگی انباشته» رو تجربه می کنه. ممکنه توی تحلیل آزمون های قبلی دیده باشی که یه جاهایی نوسان داشتی. کاملاً طبیعیه! توی روان شناسی یادگیری، ما به این می گیم «اثر فرسایش کوتاه مدت». برای اینکه از این دام فرار کنی، باید بدونی آزمون ۱۳ شهریور صرفاً یه عدد و درصد نیست؛ این آزمون، «سند دارایی های علمی توئه». هر چیزی که تا الان خوندی و عمیقش کردی، توی این آزمون باید به شکل تسلط کامل خودشو نشون بده. اگه هنوز مبحثی رو «نیم بند» بلدی، همین الان وقتشه که با یه وسواس علمی، پرونده اش رو ببندی و بذاری کنار.

یه نکته خیلی مهم که شاید کمتر کسی بهت بگه: از الان به بعد، سبک مطالعه ت باید یه تغییر کوچولو بکنه. تا الان داشتی «تک بعدی» و عمیق کار می کردی، اما از دو هفته دیگه، مدرسه و کلاس ها با حجم بالایی از تکالیف و درس های جدید هجوم میارن سمت.

۱۳ تا ۲۷ شهریور، تمرین «حفظ کیفیت در شرایط پرفشاره». یعنی باید یاد بگیری چطور با وجود خستگی ذهنی و نزدیک شدن به شروع پاییز، همچنان بتونی روی تست ها متمرکز بمونی و بازی خودت رو مدیریت کنی. پیش خوانی های سال بعد رو که توی آزمون های قبل داشتی، یادت هست؟ حالا دیگه اون پیش خوانی ها حکم «تکیه گاه» رو برات دارن. اگه همراه کلاس ها شلوغ بشه و تو حس کنی داری عقب می مونی، همین پیش خوانی های تابستونه است که بهت آرامش میده و جلوی استرس کاذب رو می گیره. به آزمون بعدی به چشم «آخرین تست آمادگی جسمانی و روانی» قبل از مسابقه اصلی نگاه کن. هر چی اینجا یاد بگیری و هر نقطه ضعفی که پیدا کنی، دقیقاً همون چیزیه که باعث میشه پاییز امسال، متفاوت ترین فصل زندگیت بشه.

حرف آخرم اینه: بذار آزمون ۲۷ شهریور، تیر خلاص «تنبلی های احتمالی» باشه. می خوام وقتی کارنامه ت رو می گیری، فارغ از هر درصدی، به خودت بگی: «دمم گرم که تا لحظه آخر تابستون، شل نکردم». این همون اعتماد به نفس قهرمانانه ایه که همراه، وقتی همه دارن با استرس شروع می کنن، تو رو با فاصله چند پله بالاتر از بقیه نگه می داره.

برو که بترکونی، ما منتظر گزارش درخشش تو توی تعطیل این آزمون هستیم! ♥

پاسخنامه کلیدی

ریاضیات

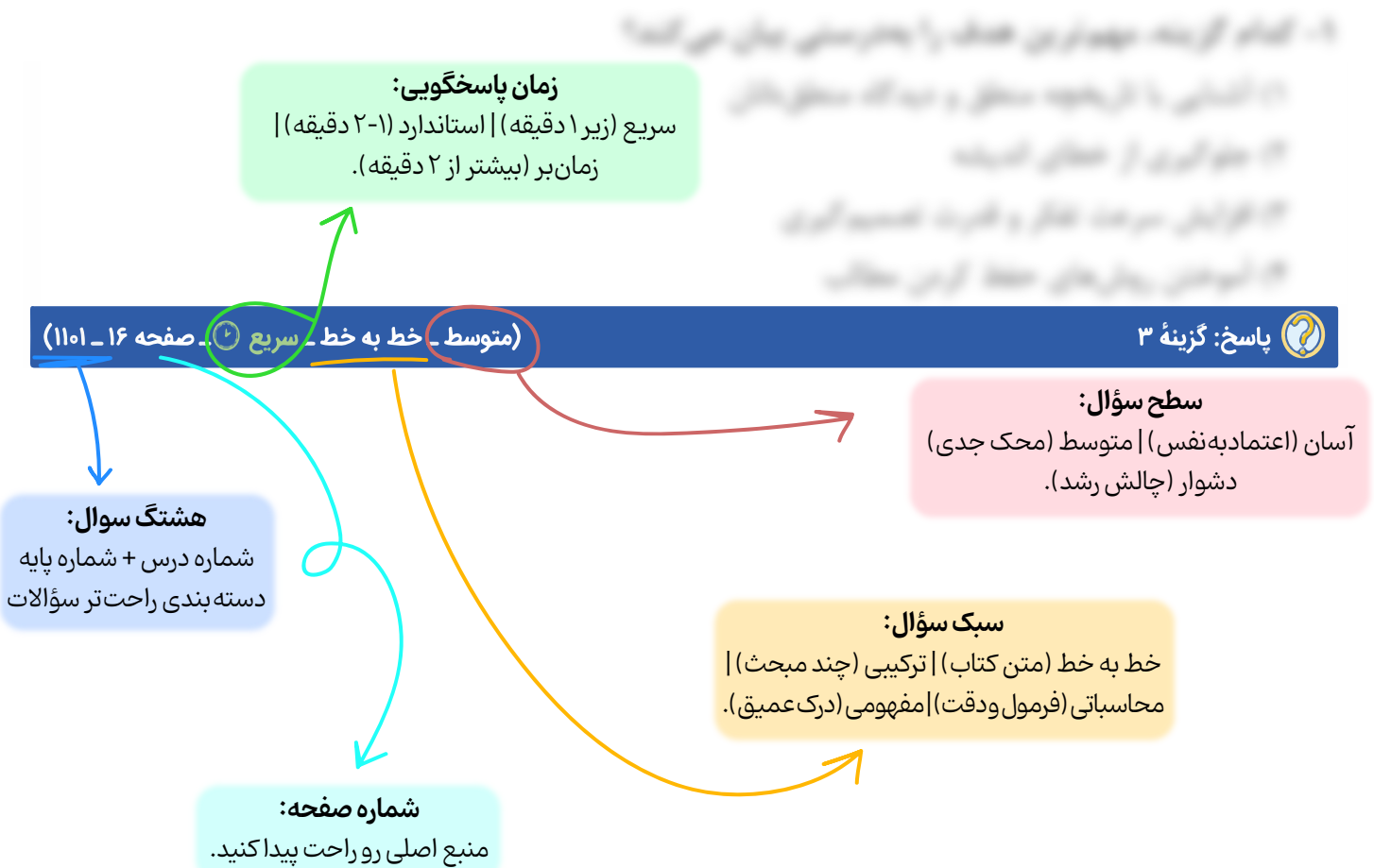
۱	۱	۲	۳	۴	۱۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴	۱۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴	۱۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴	۱۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴	۱۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴	۱۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴	۱۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴	۱۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴	۱۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴	۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴					
۲۲	۱	۲	۳	۴					
۲۳	۱	۲	۳	۴					
۲۴	۱	۲	۳	۴					
۲۵	۱	۲	۳	۴					
۲۶	۱	۲	۳	۴					
۲۷	۱	۲	۳	۴					
۲۸	۱	۲	۳	۴					
۲۹	۱	۲	۳	۴					
۳۰	۱	۲	۳	۴					

فیزیک

۳۱	۱	۲	۳	۴	۴۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴	۴۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴	۴۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴	۴۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴	۴۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴	۴۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴	۴۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴	۴۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴	۴۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴	۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴	۶۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴	۶۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴	۶۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴	۶۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴	۶۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴	۶۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴	۶۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴	۶۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴	۶۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴	۷۰	۱	۲	۳	۴

شیمی

راهنمای پاسخنامه آزمون‌ها



یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیری، نه یک مانع.
- ✓ پاسخنامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخنامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیایون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسانی که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.



برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامه ویدئویی آزمون

ریاضی ۱: معادله‌ها و نامعادله‌ها + تابع، صفحه‌های ۶۹ تا ۱۱۷
هندسه ۱: چندضلعی‌ها، صفحه‌های ۵۳ تا ۷۳

بودجه‌بندی
این آزمون

ریاضی ۱: این مباحث در مجموع ۱ تست از ۴ تست کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۱: از این مباحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.

سهم در
کنکور

۱- معادله $(2x+a)(x-a+3)=0$ دارای ریشه مضاعف است. مقدار این ریشه کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) $-\frac{1}{2}$

(آسان - مفهومی - سریع) - ریاضی ۱ صفحه ۷۵ - ۱۰۴

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به این که معادله دارای ریشه مضاعف یا تکراری است پس باید ریشه هر دو پراتنز با هم برابر باشد:

$$\begin{cases} 2x+a=0 \Rightarrow x=\frac{-a}{2} \\ x-a+3=0 \Rightarrow x=a-3 \end{cases} \Rightarrow \frac{-a}{2}=a-3 \Rightarrow -a=2a-6 \Rightarrow -3a=-6 \Rightarrow a=2$$

در نتیجه مقدار ریشه مضاعف برابر است با:

$$x=\frac{-a}{2}=a-3=-1$$

نکته رو نخونده کجا داری میری...!؟

در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر $\Delta=0$ باشد، معادله دو ریشه یکسان (یک ریشه مضاعف یا یک ریشه مکرر مرتبه ۲) دارد و معادله را می‌توان به صورت $a(x-x_1)^2=0$ نمایش داد که در آن:

$$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$$

•• iho ••

۲- با فرض $a>0$ از معادله $2x^2+5ax-3a^2=0$ دو مقدار برای x پیدا می‌شود. اختلاف این دو مقدار چند برابر a است؟

- (۱) ۳ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{2}{5}$

(آسان - محاسباتی - سریع) - ریاضی ۱ صفحه ۷۷ - ۱۰۴

پاسخ: گزینه ۲

$$\Delta=(5a)^2-4 \times 2 \times (-3a^2)=25a^2+24a^2=49a^2$$

$$x=\frac{-5a \pm \sqrt{49a^2}}{2(2)}=\frac{-5a \pm 7|a|}{4} \xrightarrow{a>0} \frac{-5a \pm 7a}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-3a \\ x_2=\frac{a}{2} \end{cases}$$

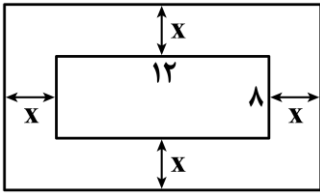
$$|x_2-x_1|=\left|\frac{a}{2}+3a\right|=\left|\frac{7a}{2}\right| \xrightarrow{a>0} \frac{7a}{2}=3\frac{1}{2}a$$

$$\Rightarrow \frac{|x_2-x_1|}{a}=\frac{3\frac{1}{2}a}{a}=3\frac{1}{2}$$

•• iho ••



۳- در شکل مقابل مساحت مستطیل بزرگ‌تر برابر ۳۲۰ واحد است. نسبت طول به عرض این مستطیل چقدر است؟



$$\frac{5}{2} \quad (2)$$

$$\frac{7}{4} \quad (4)$$

$$\frac{5}{4} \quad (1)$$

$$\frac{7}{3} \quad (3)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۷۷ - ۱۰۰۴

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{cases} \text{طول مستطیل بزرگتر} = 12 + 2x \\ \text{عرض مستطیل بزرگتر} = 8 + 2x \end{cases} \Rightarrow (12 + 2x)(8 + 2x) = 320$$

$$\Rightarrow 2 \times (6 + x) \times 2 \times (4 + x) = 320 \Rightarrow (6 + x)(4 + x) = 80$$

$$\Rightarrow x^2 + 10x + 24 = 80 \Rightarrow x^2 + 10x - 56 = 0 \Rightarrow (x + 14)(x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -14 \text{ غ ق ق} \\ x = 4 \Rightarrow \frac{\text{طول}}{\text{عرض}} = \frac{12 + 2x}{8 + 2x} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4} \end{cases}$$



۴- رأس یک سهمی که از نقاط $A(-2, 4)$ و $B(4, 4)$ عبور می‌کند بر محور x ها واقع است. نمودار این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

$$\frac{4}{9} \quad (4)$$

$$\frac{9}{4} \quad (3)$$

$$\frac{7}{4} \quad (2)$$

$$\frac{4}{7} \quad (1)$$

(متوسط - خط‌به‌خط - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۸۱ - ۱۰۰۴

پاسخ: گزینه ۴

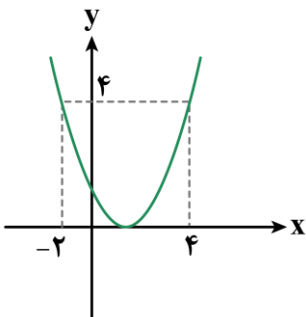
بررسی سریع

$$x_s = \frac{4 - (-2)}{2} = 1 \Rightarrow y = a(x - 1)^2$$

$$\xrightarrow{A(-2, 4)} 4 = a(-2 - 1)^2 \Rightarrow a = \frac{4}{9} \Rightarrow y = \frac{4}{9}(x - 1)^2$$

$$\xrightarrow[\text{محل برخورد با محور } y]{x=0} y = \frac{4}{9}(0 - 1)^2 = \frac{4}{9}$$

با توجه به این که نقاط A و B هم‌عرض‌اند، طول رأس سهمی با میانگین طول A و B برابر است:



$$x_s = \frac{4 + (-2)}{2} = 1$$

در نتیجه معادله سهمی به صورت $y = a(x - 1)^2$ خواهد بود. حال یکی از نقاط داده شده را در معادله سهمی جایگذاری می‌کنیم:

$$y = a(x - 1)^2 \xrightarrow{A(-2, 4)} 4 = a(-2 - 1)^2 \Rightarrow 4 = a \times 9 \Rightarrow a = \frac{4}{9}$$

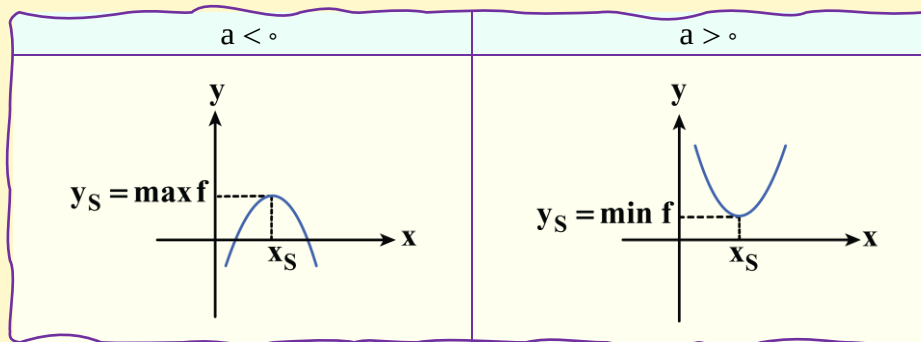
$$\Rightarrow \text{معادله سهمی: } y = \frac{4}{9}(x - 1)^2$$

و در نهایت محل برخورد با محور y ها برابر است با:

$$y = \frac{4}{9} (0-1)^2 = \frac{4}{9}$$

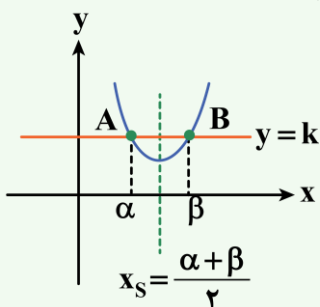
دیمی با سهمی

$f(x) = a(x-h)^2 + k$	$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$	$f(x) = ax^2 + bx + c$	
$x_S = h$	$x_S = \frac{\alpha + \beta}{2}$	$x_S = -\frac{b}{2a}$	طول رأس
$y_S = k$	$y_S = f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$	$y_S = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$	عرض رأس



نکتهٔ طلایی

می‌دانیم که یک سهمی نسبت به محور تقارن خود، متقارن است، بنابراین اگر نقطه $A(\alpha, k)$ روی سهمی قرار داشته باشد، نقطه $B(\beta, k)$ نیز قطعاً روی سهمی است و در این حالت، معادله محور تقارن سهمی به صورت $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ است. به بیان دیگر، اگر خط افقی $y = k$ سهمی را در دو نقطه به طول‌های α و β قطع کند، معادله محور تقارن سهمی برابر $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ بوده که همان طول رأس سهمی است، ببینید:



یه نمونه ببینین

اگر نقاط $A(-1, 3)$ و $B(5, 3)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادله محور تقارن این سهمی برابر است با:

$$\begin{cases} x_A = \alpha = -1 \\ x_B = \beta = 5 \end{cases} \Rightarrow x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \text{معادله محور تقارن: } x_S = 2$$



۵- اگر رأس سهمی $S(a, 3a)$ و $y = 2x^2 + bx + c$ و $x = 4 - a$ محور تقارن آن باشد، مقدار $b + c$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۶ (۳)

۸ (۲)

۹ (۱)

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۸۰ - ۱۰۴

پاسخ: گزینه ۳

$$a = 4 - a \Rightarrow a = 2$$

از آنجا که رأس سهمی روی محور تقارن قرار دارد پس:

یعنی $S(2, 6)$ رأس سهمی است. حال با توجه به معادله سهمی می توان نوشت:

$$x_s = \frac{-b}{4} \Rightarrow 2 = \frac{-b}{4} \Rightarrow b = -8 \Rightarrow y = 2x^2 - 8x + c$$

جایگذاری رأس سهمی در معادله آن $\Rightarrow 6 = 2(2)^2 - 8(2) + c \Rightarrow 6 = 8 - 16 + c \Rightarrow c = 14$

$$\Rightarrow b + c = -8 + 14 = 6$$

راهنمای زنگ بازی

با توجه به این که $S(2, 6)$ رأس سهمی است می توان نوشت:

$$2x^2 + bx + c = 2(x - 2)^2 + 6 = 2x^2 - 8x + 14 \Rightarrow \begin{cases} b = -8 \\ c = 14 \end{cases} \Rightarrow b + c = 6$$



۶- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2 + 2x}{x - 2} < x + 2$ شامل چند عدد صحیح است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۸۷ - ۱۰۴

پاسخ: گزینه ۲

برای حل نامعادله، تمام عبارت ها را به یک سمت منتقل می کنیم:

$$\frac{x^2 + 2x}{x - 2} < x + 2 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x}{x - 2} - x - 2 < 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x - (x^2 - 4)}{x - 2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x + 4}{x - 2} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|ccc} & -2 & & 2 \\ \hline \text{عبارت} & + & - & + \end{array}$$

این بازه شامل ۳ عدد صحیح ۱، ۰، -۱ است. $\Rightarrow -2 < x < 2$: جواب

ایستگاه تعیین علامت

تعیین علامت عبارت **درجه اول** به صورت $y = ax + b$; $(a \neq 0)$

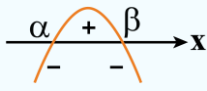
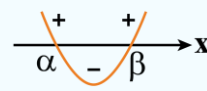
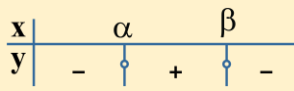
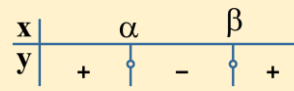
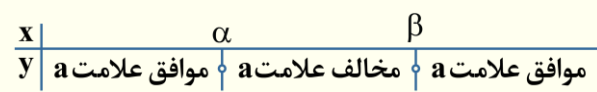
ابتدا جواب معادله $y = 0$ را به دست می آوریم و سپس با توجه به علامت a جدول تعیین علامت آن را به صورت زیر تشکیل می دهیم:

$y = ax + b$; $(a \neq 0)$	
$a < 0$	$a > 0$
$\begin{array}{c c} x & -b/a \\ \hline y & + \quad - \end{array}$	$\begin{array}{c c} x & -b/a \\ \hline y & - \quad + \end{array}$
$\begin{array}{c c} x & -b/a \\ \hline y & \text{مخالف علامت } a \quad \text{موافق علامت } a \end{array}$	

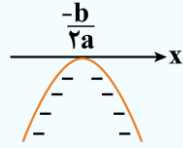
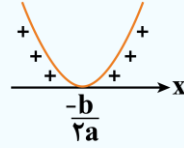
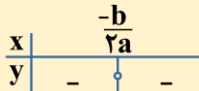
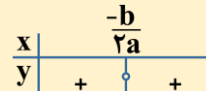
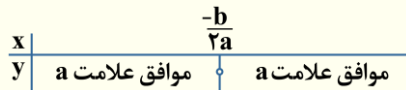
تعیین علامت عبارت **درجه دوم** به صورت $y = ax^2 + bx + c$; ($a \neq 0$)

ابتدا جواب‌های معادله $y = 0$ را در صورت وجود به دست می‌آوریم. حال با توجه به علامت Δ سه حالت ممکن است، اتفاق بیفتد:

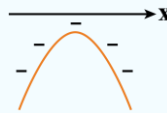
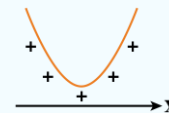
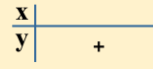
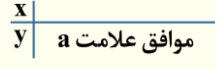
حالت اول: اگر $\Delta > 0$ باشد: معادله $y = 0$ دو **ریشه متمایز** به صورت α و β خواهد داشت ($\alpha < \beta$) و جدول تعیین علامت آن با توجه به علامت a به صورت زیر است:

$\Delta > 0$	
$a < 0$	$a > 0$
	
	
	

حالت دوم: اگر $\Delta = 0$ باشد: معادله $y = 0$ **یک ریشه مضاعف** به صورت $x = -\frac{b}{2a}$ خواهد داشت و جدول تعیین علامت آن با توجه به علامت a به صورت زیر است:

$\Delta = 0$	
$a < 0$	$a > 0$
	
	
	

حالت سوم: اگر $\Delta < 0$ باشد: معادله $y = 0$ ریشه حقیقی ندارد و جدول تعیین علامت آن با توجه به علامت a به صورت زیر است:

$\Delta < 0$	
$a < 0$	$a > 0$
	
	
	

همان طور که از حالت سوم مشخص است:

اگر $\Delta < 0$ و $a > 0$ باشد، عبارت درجه دوم، همواره مثبت است.

اگر $\Delta < 0$ و $a < 0$ باشد، عبارت درجه دوم، همواره منفی است.



۷- مجموعه جواب نامعادله $x^2 + 2x - 8 < 0$ را به صورت $|2x - a| < b$ نشان داده ایم. مقدار $a + b$ کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۸ (۲)

۲ (۱)

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۹۲ - ۱۰۰۴

پاسخ: گزینه ۳

$$x^2 + 2x - 8 < 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 2) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|ccc} & -4 & & 2 \\ \hline \text{عبارت} & + & - & + \end{array}$$

جواب: $-4 < x < 2$

حال به دو طرف $-4 < x < 2$ یک واحد اضافه می کنیم:

$$-3 < x + 1 < 3 \Rightarrow |x + 1| < 3 \xrightarrow{\times 2} |2x + 2| < 6$$

$$a + b = 4$$

پس: $a = -2$ و $b = 6$ و در نتیجه:

این شما و این هم نامعادلات قدرمطلق

با فرض نامنفی بودن a داریم:

$$|f(x)| < a \Rightarrow -a < f(x) < a$$

$$|f(x)| > a \Rightarrow \begin{cases} f(x) > a \\ \text{یا} \\ f(x) < -a \end{cases}$$

در هر کدام از حالت های فوق، اگر حالت تساوی داشتیم، در جواب ها هم حالت تساوی را می گذاریم.



۸- مجموعه جواب نامعادله $(2n - 3)x^2 + 4x - 3 > 0$ به صورت (α, β) می باشد. اگر n عددی طبیعی باشد، مقدار $\alpha + \beta$ کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

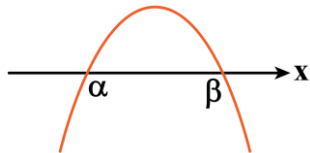
۳ (۲)

۴ (۱)

(آسان - خط به خط - سریع) - ریاضی ۱ صفحه ۸۶ - ۱۰۰۴

پاسخ: گزینه ۱

از آنجا که بازه جواب به صورت (α, β) است پس ضریب x^2 باید منفی باشد (یعنی سهمی رو به پایین باشد) و داشته باشیم:



$$2n - 3 < 0 \Rightarrow n < \frac{3}{2} \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1$$

در نتیجه نامعادله به صورت $-x^2 + 4x - 3 > 0$ خواهد بود و داریم:

$$-x^2 + 4x - 3 > 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 < 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 1) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|ccc} & 1 & & 3 \\ \hline \text{عبارت} & + & - & + \end{array} \Rightarrow \text{جواب: } x \in (1, 3)$$

$$\alpha = 1, \beta = 3 \Rightarrow \alpha + \beta = 1 + 3 = 4$$

پس:



۹- نمودار $f(x) = -x^2 - mx + 2 - m$ همواره پایین خط $y = mx + 8$ است. حدود m کدام است؟

- (۱) $-3 < m < 2$ (۲) $-2 < m < 3$ (۳) $-3 < m < -2$ (۴) $2 < m < 3$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۹۳ - ۱۰۰۴

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به این که نامعادله $f(x) < mx + 8$ باید برای تمام اعداد حقیقی برقرار باشد پس:

$$-x^2 - mx + 2 - m < mx + 8 \Rightarrow x^2 + 2mx + m + 6 > 0$$

عبارت بالا به شرطی همواره مثبت است که:

۱) $a > 0 \Rightarrow 1 > 0$ ✓

۲) $\Delta < 0 \Rightarrow (2m)^2 - 4(1)(m+6) < 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m - 24 < 0$

$\Rightarrow m^2 - m - 6 < 0 \Rightarrow (m-3)(m+2) < 0$ تعیین علامت عبارت

+	-2	+	3	+
---	----	---	---	---

$\Rightarrow -2 < m < 3$

نرو وایسا...

عبارت درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) زمانی **همواره مثبت** است که $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد.



۱۰- مجموعه جواب نامعادله $(5-2m)x^2 + nx + n + 2 < 0$ به صورت بازه $(-\infty, -2)$ است. مقدار mn کدام است؟

- (۱) -10 (۲) 10 (۳) -5 (۴) 5

(سخت - مفهومی - زمان بر) - ریاضی ۱ صفحه ۸۶ - ۱۰۰۴

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به بازه داده شده برای جواب، نامعادله باید از درجه اول باشد یعنی:

$$5 - 2m = 0 \Rightarrow m = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow nx + n + 2 < 0 \Rightarrow nx < -n - 2 \xrightarrow{n > 0} x < \frac{-n-2}{n} \Rightarrow x \in (-\infty, \frac{-n-2}{n})$$

$$\Rightarrow \frac{-n-2}{n} = -2 \Rightarrow n+2=2n \Rightarrow n=2 \Rightarrow mn = \frac{5}{2} \times 2 = 5$$

یک نکته بخوان و صد گنج ببر...

اگر جواب نامعادله $ax^2 + bx + c \geq 0$ به صورت $(\alpha, +\infty)$ و یا به صورت $(-\infty, \alpha)$ باشد:

✓ باید $a = 0$ باشد.

✓ $x = \alpha$ ریشه عبارت $bx + c = 0$ است.



۱۱- اگر $f = \{(2, a^2), (-1, 3), (2, a+2), (a+3, 2), (a-3, b)\}$ تابع باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) 5 (۲) 4 (۳) 3 (۴) 2

(آسان - محاسباتی - سریع) - ریاضی ۱ صفحه ۹۹ - ۱۰۰۵

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{cases} f(2) = a^2 \\ f(2) = a+2 \end{cases} \Rightarrow a^2 = a+2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a-2)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

به ازای $a = -1$ رابطه داده شده شامل دو زوج مرتب $(2, 2)$ و $(2, 1)$ خواهد بود که باعث می شود f تابع نباشد؛ در نتیجه $a = 2$ بوده و داریم:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 3 \\ f(-1) &= b \Rightarrow b = 3 \Rightarrow f = \{(2, 4), (-1, 3), (5, 2)\} \\ \Rightarrow a + b &= 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

بریم ببینیم تابع چی هست اصلاً...!

تعریف تابع: یک تابع از مجموعه A به مجموعه B ، رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A ، دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می شود.

برای درک بهتر می توانیم جدول زیر رو بخونیم

رابطه	توضیح
رابطه ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می دهد.	این رابطه یک تابع است چرا که هر فرد دقیقاً یک گروه خونی دارد.
رابطه ای که به هر فرد دوستان او را نسبت می دهد.	این رابطه بیانگر یک تابع نیست چرا که هر فرد می تواند بیش از یک دوست داشته باشد.
رابطه ای که به هر عدد حقیقی، ریشه سوم آن را نسبت می دهد.	این رابطه یک تابع است چرا که هر عدد حقیقی دقیقاً یک ریشه سوم دارد.

تشخیص تابع بودن نمایش زوج مرتبی

یک نمایش زوج مرتبی زمانی نشان دهنده یک تابع خواهد بود که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن، مؤلفه اول برابر نداشته باشند.

توجه!

در نمایش زوج مرتبی یک تابع، اگر مولفه های اول دو زوج مرتب با هم برابر باشند، باید مولفه های دوم آن ها نیز با هم برابر باشند.

یه نمونه باحال

$$\begin{aligned} f &= \left\{ (0, 2), \left(\frac{3}{5}, 4\right), (-5, 1), (7, 1) \right\} \text{ تابع هست} \\ f &= \{(3, 4), (5, 0), (3, 1)\} \text{ تابع نیست} \end{aligned}$$

•••

$$12- \text{رابطه } f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \leq a \\ 3x - 1 & x \geq a \end{cases} \text{ یک تابع را نمایش می دهد. مقدار } f(a) \text{ کدام است؟}$$

۲۰ (۴)

۱۲ (۳)

۶ (۲)

۲ (۱)

(متوسط - محاسباتی - سریع) - ریاضی ۱ صفحه ۱۱۷ - ۱۰۰۵

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به این که $x = a$ در هر دو ضابطه وجود دارد پس مقادیری که برای $f(a)$ در هر دو ضابطه به دست می آیند باید برابر باشند:

$$\begin{aligned} f(a) &= a^2 + a \Rightarrow a^2 + a = 3a - 1 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \\ f(a) &= 3a - 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$f(a) = f(1) = 3(1) - 1 = 2$$

حال $f(a)$ را به دست می آوریم:

•••

۱۳- تابع f همانی و تابع g ثابت است. اگر $f(3) = 12$ و $(2+g(1)).f(3) = 12$ باشد، مقدار $f(2g(-1))$ کدام است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

-۴ (۲)

-۶ (۱)

(آسان - ترکیبی - سریع) - ریاضی ۱ صفحه ۱۱۰ - ۱۰۰۵

پاسخ: گزینه ۴

$$g(x) = k \text{ و } f(x) = x$$

با توجه به این که f تابعی همانی و g ثابت است پس:

در نتیجه:

$$(2+g(1)).f(3) = 12 \Rightarrow (2+k) \times 3 = 12 \Rightarrow 2+k = 4 \Rightarrow k = 2$$

$$\Rightarrow g(x) = 2 \Rightarrow g(-1) = 2$$

$$f(\underbrace{2g(-1)}) = f(4) = 4$$

و خواهیم داشت:

تابع ثابت

معرفی: تابع ثابت، تابعی است که به ازای تمامی ورودی‌ها، تنها یک عدد ثابت را به عنوان خروجی در اختیار ما قرار می‌دهد، به عبارت دیگر **برد تابع ثابت** تنها شامل **یک عضو** می‌باشد.

نمایش‌های مختلف تابع ثابت

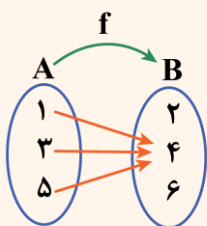
نمایش جبری (ضابطه‌ای): ضابطه تابع ثابت به صورت $f(x) = k$ می‌باشد که در آن k عددی **حقیقی و ثابت** است.

به عنوان مثال

توابع $f(x) = 2$ ، $f(x) = -\sqrt{3}$ و $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ همگی توابعی ثابت هستند.

نمایش پیکانی: در نمایش پیکانی تابع ثابت، همه پیکان‌ها از مجموعه A ، **فقط به یک عضو** از مجموعه B وصل می‌شوند.

به عنوان مثال



$$D_f = \{1, 3, 5\}$$

$$R_f = \{4\}$$

نمایش زوج‌مرتبی: در نمایش زوج‌مرتبی یک تابع ثابت، **مؤلفه‌های دوم تمامی زوج‌مرتب‌ها** با هم **برابر** هستند.

به عنوان مثال

$$f(x) = \{(2, 3), (0, 3), (-1, 3)\}$$

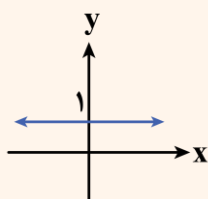
$$D_f = \{-1, 0, 2\} \quad , \quad R_f = \{3\}$$

نمایش نموداری:

الف) با دامنه $\mathbb{R}$: در این حالت نمودار تابع ثابت، خط افقی $y = k$ است.

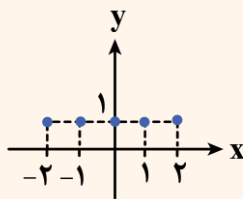
ب) با دامنه محدود: در این حالت نمودار تابع ثابت، بخشی از خط افقی $y = k$ یا نقاطی روی این خط است.

به عنوان مثال



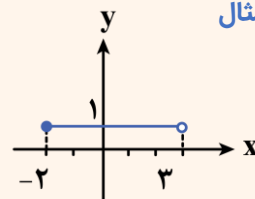
$$\bullet D_f = \mathbb{R}$$

$$\bullet R_f = \{1\}$$



$$\bullet D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$\bullet R_f = \{1\}$$



$$\bullet D_f = [-2, 3)$$

$$\bullet R_f = \{1\}$$

تابع همانی

معرفی: تابع همانی، تابعی است که هر عضو از دامنه را دقیقاً به همان عضو در برد، نظیر می‌کند، به عبارت دیگر دامنه و برد تابع همانی با هم برابر هستند.

نمایش‌های مختلف تابع همانی

نمایش جبری (ضابطه‌ای): ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است.

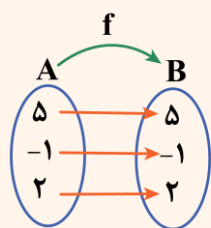
یه نمونه باحال ببین!

$$f(-3) = -3$$

$$f(-x+2) = -x+2$$

نمایش پیکانی: در نمایش پیکانی تابع همانی، هر پیکان از مجموعه A، به همان عضو در مجموعه B وارد می‌شود.

یه نمونه باحال ببین!



$$D_f = R_f = \{5, -1, 2\}$$

نمایش زوج مرتبی: در نمایش زوج مرتبی تابع همانی، تمامی زوج مرتب‌ها، مولفه اول و دوم برابری دارند.

یه نمونه باحال ببین!

$$f(x) = \{(-2, -2), (1, 1), (\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$$

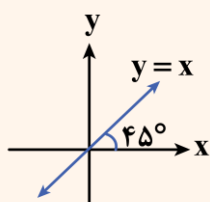
$$D_f = R_f = \{-2, 1, \sqrt{2}\}$$

نمایش نموداری:

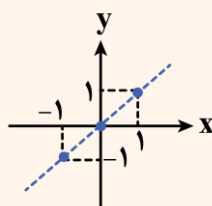
الف) با دامنه $\mathbb{R}$: در این حالت نمودار تابع همانی همان نیمساز ناحیه اول و سوم ($y = x$) است.

ب) با دامنه محدود: در این حالت نمودار تابع همانی، بخشی از نیمساز ناحیه اول و سوم یا نقاطی روی این خط است.

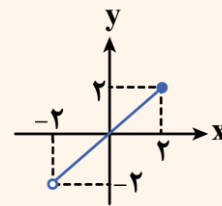
یه نمونه باحال ببین!



$$D_f = R_f = \mathbb{R}$$



$$D_f = R_f = \{-1, 0, 1\}$$



$$D_f = R_f = [-2, 2]$$



۱۴- تابع $f(x) = \begin{cases} 7-2x & x \leq 2 \\ 2-3x & x > 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(a) = 13$ باشد، مقدار $f(-a)$ کدام است؟

$$-14 \quad (4)$$

$$-13 \quad (3)$$

$$-7 \quad (2)$$

$$-10 \quad (1)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۱۱۲ و ۱۱۳ - ۱۰۰۵

پاسخ: گزینه ۲

در ضابطه اول چون $x \leq 2$ است پس:

$$7-2x \geq 7-2(2) \Rightarrow 7-2x \geq 3$$

همچنین در ضابطه دوم چون $X > 2$ است پس:

$$2 - 3x < 2 - 3(2) \Rightarrow 2 - 3x < -4$$

در نتیجه فقط ضابطه اول می‌تواند برابر ۱۳ باشد:

$$\begin{aligned} f(a) = 13 &\Rightarrow 7 - 2a = 13 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3 \\ \Rightarrow f(-a) = f(3) &= 2 - 3(3) = 2 - 9 = -7 \end{aligned}$$



۱۵- تابع خطی f با دامنه $[-2, 3]$ و برد $[-3, 7]$ مفروض است. مقدار $f(\frac{1}{2})$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۱۰۳ و ۱۱۵ - ۱۰۰۵

پاسخ: گزینه ۲

مسأله را در دو حالت حل می‌کنیم:

حالت اول

فرض کنید $f(x) = ax + b$ و $a > 0$ باشد. در این صورت:

$$\begin{cases} f(-2) = -3 \Rightarrow -2a + b = -3 \\ f(3) = 7 \Rightarrow 3a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = 2$$

حالت دوم

فرض کنید $f(x) = ax + b$ و $a < 0$ باشد. در این صورت:

$$\begin{cases} f(-2) = 7 \Rightarrow -2a + b = 7 \\ f(3) = -3 \Rightarrow 3a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -2x + 3 \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = 2$$

در نتیجه در هر دو حالت $f(\frac{1}{2}) = 2$ می‌باشد.

یه راه ساده‌تر بگم بهتره...؟! 

در توابع خطی، اگر X وسط دامنه باشد، Y هم وسط برد است. در نتیجه چون $X = \frac{1}{2}$ وسط $[-2, 3]$ است پس $f(\frac{1}{2})$ هم وسط برد $[-3, 7]$ یعنی $Y = 2$ است.

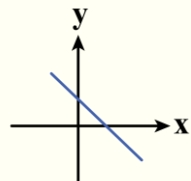
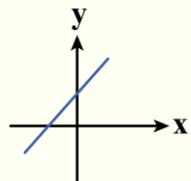
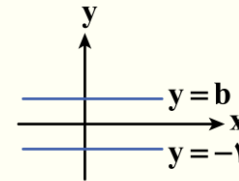
تابع خطی 

هر تابع که بتوان آن را به صورت $f(x) = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود ($a, b \in \mathbb{R}$). در این رابطه a را شیب و b را عرض از مبدأ می‌نامیم.

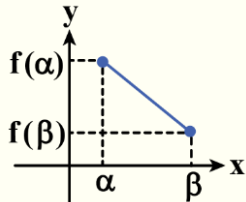
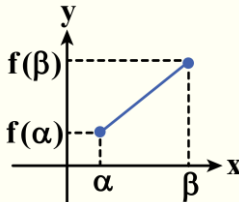
به عنوان مثال 

توابع $y = -2x + 1$ و $y = 3$ خطی هستند اما توابع $y = \sqrt{x+3}$ و $y = x|x-1|$ خطی نیستند.

توی جدول زیر انواع توابع خطی رو می‌بینید:

$a < 0$	$a > 0$	$a = 0$
		
تابع خطی نزولی	تابع خطی صعودی	تابع ثابت

دامنه و برد یک تابع خطی در حالت کلی برابر $\mathbb{R}$ است (به جز در مواردی که خود سوال، دامنه و برد تابع خطی را محدود کرده باشد). اگر دامنه تابع خطی $f(x) = ax + b$ به صورت $[\alpha, \beta]$ باشد، در این صورت برای به دست آوردن برد این تابع خطی داریم:

$a < 0$	$a > 0$	
		نمودار
$[f(\beta), f(\alpha)]$	$[f(\alpha), f(\beta)]$	برد



۱۶- تابع قطعه‌ای $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 1 \\ 3x+1 & x \leq 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(1-|a|) = f(2+|a|)$ باشد، مقدار $f(|a|)$ کدام است؟

۱/۶ (۴)

۱/۴ (۳)

۲/۴ (۲)

۲/۸ (۱)

(متوسط - محاسباتی - زمان‌بر) - ریاضی ۱ صفحه ۱۱۲ - ۱۰۰۵

پاسخ: گزینه ۴

بررسی سریع

$$f(1-|a|) = f(2+|a|) \Rightarrow 3(1-|a|) + 1 = 2(2+|a|) - 1$$

$$\Rightarrow 4 - 3|a| = 3 + 2|a| \Rightarrow |a| = \frac{1}{5} \Rightarrow f(|a|) = f\left(\frac{1}{5}\right) = 3\left(\frac{1}{5}\right) + 1 = 1/6$$

با توجه به این که $|a|$ همواره نامنفی است پس:

$$1 - |a| \leq 1 \Rightarrow f(1-|a|) = 3(1-|a|) + 1 = 4 - 3|a|$$

$$2 + |a| \geq 2 \Rightarrow f(2+|a|) = 2(2+|a|) - 1 = 2|a| + 3$$

$$\Rightarrow 4 - 3|a| = 2|a| + 3 \Rightarrow 5|a| = 1 \Rightarrow |a| = \frac{1}{5}$$

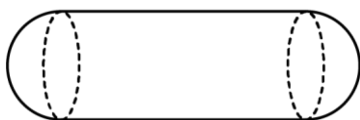
$$f(|a|) = f\left(\frac{1}{5}\right) = 3\left(\frac{1}{5}\right) + 1 = \frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5} = \frac{16}{10} = 1/6$$

حال به محاسبه $f(|a|)$ می‌پردازیم:



۱۷- یک تانکر سوخت‌رسان از یک استوانه به طول $\frac{17}{3}x$ و دو نیم‌کره به شعاع x در دو انتهای استوانه، مطابق شکل ساخته شده است.

حجم تانکر تابعی از x است. ضابطه این تابع کدام است؟



$$6\pi x^3 \quad (2)$$

$$9\pi x^3 \quad (1)$$

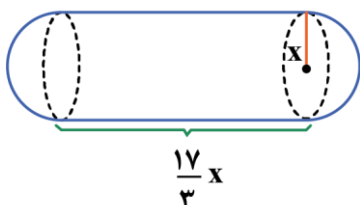
$$8\pi x^3 \quad (4)$$

$$7\pi x^3 \quad (3)$$

(آسان - مفهومی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۱۱۶ - ۱۰۰۵

پاسخ: گزینه ۳

حجم تانکر از یک استوانه و دو نیم‌کره تشکیل شده است، پس:



$$V = h\pi r^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$\frac{17}{3}x$$

$$= \frac{17}{3}x \times \pi \times x^2 + \frac{4}{3}\pi x^3$$

$$= \frac{17}{3}\pi x^3 + \frac{4}{3}\pi x^3 = 7\pi x^3$$



۱۸- نمودار سهمی $y = x^2 - 4x$ را ۲ واحد در امتداد محور x ها به سمت راست و ۳ واحد در امتداد محور y ها به سمت پایین انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، نمودار سهمی اولیه را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۳/۵ (۴)

۲/۲۵ (۳)

۲/۵ (۲)

۳/۲۵ (۱)

(آسان - محاسباتی - سریع) - ریاضی ۱ صفحه ۱۱۴ - ۱۰۰۵

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا تبدیلات گفته شده را روی سهمی انجام می‌دهیم:

$$y = x^2 - 4x \xrightarrow{\text{واحد به راست ۲}} y = (x-2)^2 - 4(x-2) \xrightarrow{\text{واحد به پایین ۳}} y = (x-2)^2 - 4(x-2) - 3$$

$$\Rightarrow y = x^2 - 4x + 4 - 4x + 8 - 3 \Rightarrow y = x^2 - 8x + 9$$

حال این سهمی را با سهمی اولیه تقاطع می‌دهیم:

$$x^2 - 8x + 9 = x^2 - 4x \Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = 2/25$$

تبدیل نمودار توابع

انتقال افقی: اگر نمودار و یا ضابطه تابع $\begin{cases} y = f(x) \\ D_f : [a, b] \rightarrow R_f : [c, d] \end{cases}$ را در اختیار داشته باشیم، با فرض $k > 0$ داریم:

در ضابطه تابع f به جای تمامی x ها، $(x+k)$ قرار می‌دهیم.	ضابطه	$f(x+k)$
نمودار تابع f را به اندازه k واحد و در راستای محور x ها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.	نمودار	
اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(x-k, y)$ روی نمودار تابع $f(x+k)$ قرار دارد.	نقطه متناظر	
اگر دامنه تابع f به صورت $[a, b]$ باشد، دامنه تابع $f(x+k)$ به صورت $[a-k, b-k]$ می‌باشد.	دامنه	
برد تابع $f(x+k)$ با برد تابع f برابر است.	برد	
در ضابطه تابع f به جای تمامی x ها، $(x-k)$ قرار می‌دهیم.	ضابطه	$f(x-k)$
نمودار تابع f را به اندازه k واحد و در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می‌کنیم.	نمودار	
اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(x+k, y)$ روی نمودار تابع $f(x-k)$ قرار دارد.	نقطه متناظر	
اگر دامنه تابع f به صورت $[a, b]$ باشد، دامنه تابع $f(x-k)$ به صورت $[a+k, b+k]$ می‌باشد.	دامنه	
برد تابع $f(x-k)$ با برد تابع f برابر است.	برد	

انتقال عمودی: اگر نمودار و یا ضابطه تابع $\begin{cases} y = f(x) \\ D_f : [a, b] \rightarrow R_f : [c, d] \end{cases}$ را در اختیار داشته باشیم، با فرض $k > 0$ داریم:

ضابطه	به ضابطه تابع f, k واحد اضافه می‌کنیم.
نمودار	نمودار تابع f را به اندازه k واحد و در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.
نقطه متناظر	اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، $A'(x, y+k)$ روی نمودار تابع $f(x) + k$ قرار دارد.
دامنه	دامنه تابع $f(x) + k$ با دامنه تابع f برابر است.
برد	اگر برد تابع f به صورت $[c, d]$ باشد، برد تابع $f(x) + k$ به صورت $[c+k, d+k]$ می‌باشد.
ضابطه	از ضابطه تابع f, k واحد کم می‌کنیم.
نمودار	نمودار تابع f را به اندازه k واحد و در راستای محور y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.
نقطه متناظر	اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(x, y-k)$ روی نمودار تابع $f(x) - k$ قرار دارد.
دامنه	دامنه تابع $f(x) - k$ با دامنه تابع f برابر است.
برد	اگر برد تابع f به صورت $[c, d]$ باشد، برد تابع $f(x) - k$ به صورت $[c-k, d-k]$ می‌باشد.



۱۹- نمودار سهمی $f(x) = x^2 + 4x + 1$ را در نظر بگیرید. مجموع طول و عرض مختصات رأس سهمی $y = f(x-1) - 3$ کدام است؟
 (۱) -۸ (۲) -۷ (۳) -۶ (۴) -۵

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۱۱۴ - ۱۰۰۵

پاسخ: گزینه ۲

تبدیلات خواسته شده را روی f اعمال می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 + 4x + 1 \xrightarrow{\text{واحد به راست}} f(x-1) = (x-1)^2 + 4(x-1) + 1$$

$$\xrightarrow{\text{۳ واحد به پایین}} f(x-1) - 3 = (x-1)^2 + 4(x-1) + 1 - 3$$

$$\Rightarrow y = f(x-1) - 3 = x^2 - 2x + 1 + 4x - 4 - 2 = x^2 + 2x - 5$$

حال رأس سهمی $y = x^2 + 2x - 5$ را به دست می‌آوریم:

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(1)} = -1 \Rightarrow y_s = (-1)^2 + 2(-1) - 5 = 1 - 2 - 5 = -6$$

$$\text{رأس سهمی } S(-1, -6) \Rightarrow \text{مجموع مختصات} = -1 - 6 = -7$$

می‌خواهی ساده‌تر حل کنی؟ پس اینو بخون...

$$f(x) = x^2 + 4x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x_s = \frac{-4}{2} = -2 \\ y_s = (-2)^2 + 4(-2) + 1 = -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{رأس سهمی}} S(-2, -3)$$

$$S(-2, -3) \xrightarrow{\text{واحد به راست}} S'(-2+1, -3-3) \xrightarrow{\text{۳ واحد به پایین}} S'(-1, -6)$$

$$-1 - 6 = -7$$

مجموع مختصات:



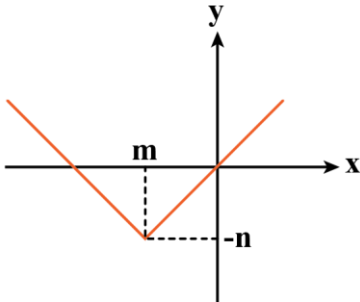
- ۲۰- نمودار تابع $f(x) = |x - m| - n$ از تمام نواحی نمودار مختصات به جز ناحیه چهارم، عبور می‌کند. اگر نمودار f از مبدأ عبور کند و $f(n) = 6$ باشد، مقدار $f(-8)$ کدام است؟
- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) -۴

(سخت - مفهومی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۱۱۴ - ۱۰۰۵

پاسخ: گزینه ۴

$n > 0$ و $m < 0$

با توجه به اطلاعات مسأله، نمودار f به صورت مقابل خواهد بود. پس:
با توجه به نمودار:



$$\begin{aligned} f(0) = 0 &\Rightarrow |-m| - n = 0 \Rightarrow n = |-m| \xrightarrow{m < 0} n = -m \\ f(n) = 6 &\Rightarrow |n - m| - n = 6 \Rightarrow |-m - m| + m = 6 \\ &\Rightarrow |-2m| + m = 6 \xrightarrow{m < 0} -2m + m = 6 \Rightarrow m = -6 \\ &\Rightarrow n = 6 \\ f(-8) &= |-8 + 6| - 6 = 2 - 6 = -4 \end{aligned}$$

پس $f(x) = |x + 6| - 6$ بوده و داریم:



- ۲۱- در یک n ضلعی با کم شدن یک ضلع، ۸ قطر از تعداد قطرهای کم می‌شود، مجموع زوایای داخلی این n ضلعی چند برابر مجموع زوایای خارجی آن است؟

(۴) ۶

(۳) ۵

(۲) ۴

(۱) ۳

(متوسط - خط به خط - استاندارد) - هندسه ۱ صفحه ۵۵ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۲

روش اول

می‌دانیم تعداد قطرهای n ضلعی از رابطه $\frac{n(n-3)}{2}$ به دست می‌آید، بنابراین:

$$\text{تعداد قطرهای } (n-1) \text{ ضلعی} - \text{تعداد قطرهای } n \text{ ضلعی} = \frac{n(n-3)}{2} - \frac{(n-1)(n-4)}{2} = 8$$

$$\xrightarrow{\times 2} n^2 - 3n - (n^2 - 5n + 4) = 16 \Rightarrow 2n - 4 = 16 \Rightarrow 2n = 20 \Rightarrow n = 10$$

می‌دانیم که در یک n ضلعی مجموع زوایای داخلی برابر $(n-2) \times 180^\circ$ و مجموع زوایای خارجی 360° است، بنابراین در این 10 ضلعی داریم:

$$\frac{\text{مجموع زوایای داخلی } n \text{ ضلعی}}{\text{مجموع زوایای خارجی } n \text{ ضلعی}} = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{360^\circ} = \frac{8 \times 180^\circ}{360^\circ} = 4$$

روش دوم

می‌دانیم که در این n ضلعی با حذف یک ضلع، ۸ قطر از تعداد قطرهای کم می‌شود، بنابراین طبق نکته ۱ داریم:

$$\frac{\text{مجموع زوایای داخلی } n \text{ ضلعی}}{\text{مجموع زوایای خارجی } n \text{ ضلعی}} = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{360^\circ} = \frac{8 \times 180^\circ}{360^\circ} = 4$$

اندازه زوایا و تعداد قطرهای n - ضلعی

$$\text{مجموع تمام زوایای داخلی} = (n-2) \times 180^\circ$$

$$360^\circ = \text{مجموع تمام زوایای خارجی}$$

$$\text{اندازه هر زاویه داخلی } n \text{ ضلعی} = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$$

$$\text{اندازه هر زاویه خارجی } n \text{ ضلعی منتظم} = \frac{360^\circ}{n}$$

$$n-3 = \text{تعداد قطرهای عبوری از هر رأس } n \text{ ضلعی}$$

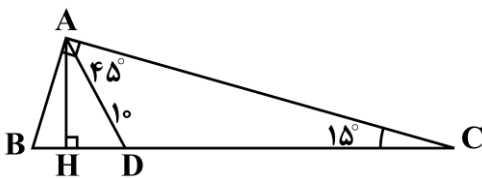
$$\frac{n(n-3)}{2} = \text{تعداد قطرهای } n \text{ ضلعی}$$

نکات مربوط به n ضلعیها

- (۱) در یک n ضلعی **محدب**، با **حذف** یک ضلع (یا یک رأس)، **تعداد** **قطرها** به اندازه $(n-2)$ تا، **کاهش** می یابد.
 (۲) در یک n ضلعی **محدب**، با **اضافه** کردن یک ضلع (یا یک رأس)، **تعداد** **قطرها** به اندازه $(n-1)$ تا، **افزایش** می یابد.



۲۲- در مثلث قائم الزاویه ABC مطابق شکل، اندازه ضلع BC کدام است؟



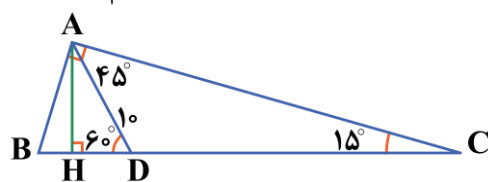
- (۱) $10\sqrt{3}$
 (۲) $20\sqrt{3}$
 (۳) $5\sqrt{3}$
 (۴) ۲۰

(متوسط - خط به خط - استاندارد) - هندسه ۱ صفحه ۶۰ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۲

در مثلث ADC زاویه خارجی $\hat{ADH}$ برابر با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور است، بنابراین:

حال در مثلث قائم الزاویه AHD ضلع روبه روی زاویه 60° ، وتر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است، بنابراین:



حال در مثلث قائم الزاویه ABC زاویه $\hat{C} = 15^\circ$ است، بنابراین ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ وتر است:

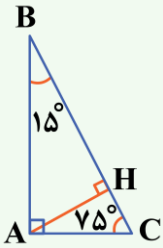
$$AH = \frac{1}{4} BC \Rightarrow 5\sqrt{3} = \frac{1}{4} BC \Rightarrow BC = 20\sqrt{3}$$

مثلثهای قائم الزاویه با زاویههای خاص

- در هر مثلث قائم الزاویه، اندازه ضلع روبه رو به زاویه 30° ، **نصف** اندازه وتر است.
- در هر مثلث قائم الزاویه، اندازه ضلع روبه رو به زاویه 45° ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **اندازه** **وتر** است.
- در هر مثلث قائم الزاویه، اندازه ضلع روبه رو به زاویه 60° ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **اندازه** **وتر** است.

ارتفاع وارد بر وتر درحالی که زاویه ۱۵ یا ۷۵ درجه داریم

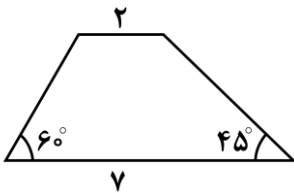
اگر یک مثلث قائم‌الزاویه دارای زاویه ۱۵° یا ۷۵° باشد، ارتفاع وارد بر وتر، برابر $\frac{1}{4}$ طول وتر است.



$$AH = \frac{1}{4} BC$$



۲۳- وسط‌های اضلاع دوزنقه شکل مقابل را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم، شکل حاصل الزاماً کدام است؟



(۱) مستطیل

(۲) لوزی

(۳) مربع

(۴) متوازی‌الاضلاع

(آسان - خط‌به‌خط - سریع) - هندسه ۱ صفحه ۶۴ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۴

از به هم وصل کردن وسط‌های اضلاع هر چهارضلعی دلخواه الزاماً متوازی‌الاضلاع به دست می‌آید. در حالت خاص اگر قطرهای با هم برابر باشند، شکل حاصل لوزی است و اگر قطرهای برهم عمود باشند، شکل حاصل مستطیل است. واضح است که اگر قطرهای مساوی و همچنین عمود باشند شکل حاصل مربع است. بنابراین از آنجا که قطرهای دوزنقه داده شده نه مساوی و نه عمودند پس شکل حاصل فقط متوازی‌الاضلاع است.

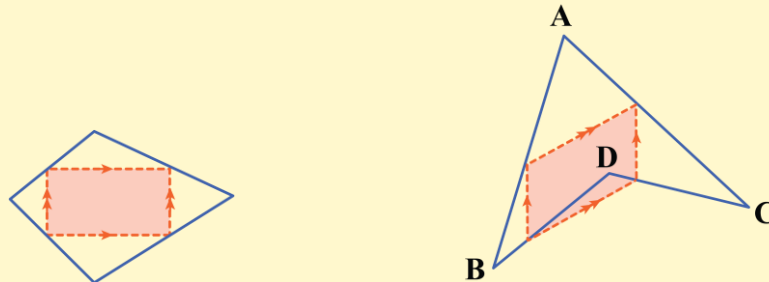
وصل کردن وسط‌های اضلاع چهارضلعی

اگر وسط‌های اضلاع هر چهارضلعی (محدب یا مقعر) را متوالیاً به هم وصل کنیم طبق قضیه تالس یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.

(۱) اندازه اضلاع متوازی‌الاضلاع حاصل، برابر با نصف قطرهای چهارضلعی اصلی است.

(۲) محیط متوازی‌الاضلاع حاصل شده، برابر با مجموع دو قطر چهارضلعی اصلی است.

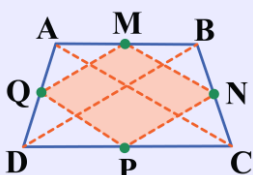
(۳) مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل شده درحالتی که ABCD محدب باشد، نصف مساحت چهارضلعی اصلی است.



شکل حاصل از وصل کردن وسط‌های اضلاع چهارضلعی

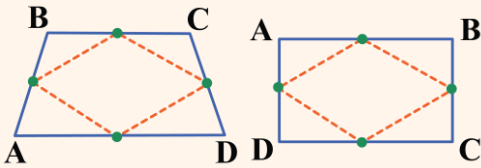
اگر وسط‌های اضلاع هر چهارضلعی دلخواه را به‌طور متوالی به هم وصل کنیم یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید این متوازی‌الاضلاع همواره موازی با قطرهای چهارضلعی و اندازه اضلاعش مساوی با نصف اندازه قطرهای چهارضلعی است. بنابراین حالات خاص زیر قابل بررسی است. اگر MNPQ چهارضلعی حاصل از وصل کردن وسط‌های ABCD باشد:

(۱) اگر قطرهای ABCD برابر باشند، اندازه اضلاع MNPQ با هم برابر شده و لوزی می‌شود.

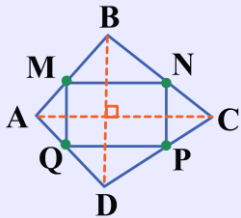


یه نمونه باحال ببین!

از وصل کردن وسط‌های اضلاع هر مستطیل و دوزنقه متساوی‌الساقین همواره یک لوزی حاصل می‌شود.

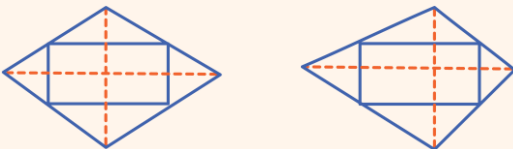


۲) اگر قطرهای ABCD بر هم عمود باشند، اضلاع MNPQ نیز بر هم عمود شده و مستطیل می‌شود.

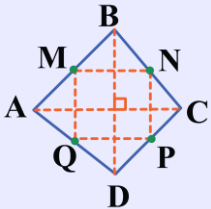


یه نمونه باحال ببین!

از وصل کردن وسط‌های اضلاع هر لوزی و هر کایت همواره یک مستطیل حاصل می‌شود.



نتیجه: بنابراین اگر قطرهای ABCD هم برابر و هم عمود باشند، اضلاع MNPQ نیز برابر و بر هم عمود شده و چهارضلعی MNPQ مربع می‌شود.



یه نمونه باحال ببین!

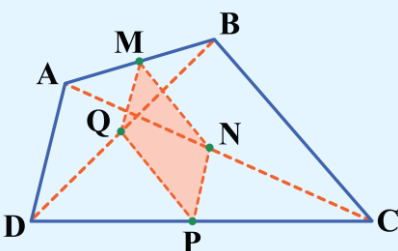
از به هم وصل کردن وسط‌های اضلاع هر دوزنقه متساوی‌الساقین با قطرهای عمود بر هم یا هر مربع، همواره یک مربع حاصل می‌شود.

جمع‌بندی

رفتار اضلاع متوازی‌الاضلاع حاصل از وصل کردن وسط‌های اضلاع هر چهارضلعی تابع رفتار قطرهای چهارضلعی اصلی است، یعنی هر اتفاقی برای قطرهای چهارضلعی اصلی بیافتد آن اتفاق به اضلاع متوازی‌الاضلاع سرایت می‌کند.

شکل حاصل از وصل کردن وسط‌های اضلاع و اقطار چهارضلعی

از وصل کردن وسط‌های دو قطر و دو ضلع مقابل هر چهارضلعی محدب همواره یک متوازی‌الاضلاع به دست می‌آید:



$$MN = QP = \frac{1}{2} BC$$

$$MQ = NP = \frac{1}{2} AD$$

۱) اگر دو ضلع مقابل دیگر برابر باشند، متوازی‌الاضلاع به دست آمده لوزی است.

۲) اگر امتداد دو ضلع مقابل دیگر بر هم عمود باشند، متوازی‌الاضلاع به دست آمده، مستطیل است.

یه نمونه باحال ببین!

در دوزنقه MNCA امتداد ساقها در نقطه B بر هم عمودند، اگر وسطهای دو قاعده و وسطهای دو قطر دوزنقه را متوالیاً به هم وصل کنیم چهارضلعی به دست آمده کدام است؟

(۲) مربع

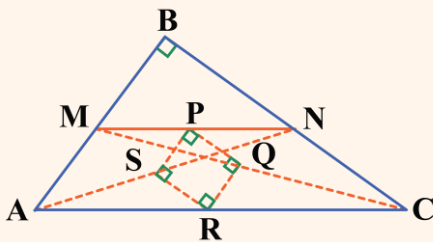
(۱) لوزی

(۴) دوزنقه متساوی الساقین

(۳) مستطیل

پاسخ تشریحی:

در مثلث MNC پاره خط PQ موازی NC و در مثلث ANC پاره خط SR موازی NC است، همچنین در مثلث AMN پاره خط PS موازی AM و در مثلث MAC پاره خط RQ موازی AM است و چون امتداد AM بر امتداد NC عمود است، زاویه های چهارضلعی به دست آمده نیز همگی قائمه خواهد بود و چهارضلعی به دست آمده مستطیل است.



پاسخ: گزینه ۳



۲۴- در مثلثی به اضلاع ۱۰، ۲۴ و ۲۶ فاصله محل تلاقی میانه ها تا محل تلاقی ارتفاع ها چقدر است؟

(۴) $\frac{20}{3}$

(۳) $\frac{52}{3}$

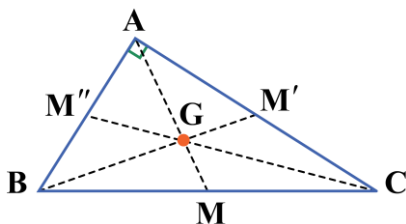
(۲) $\frac{13}{3}$

(۱) $\frac{26}{3}$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۱ صفحه ۶۷ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۱

چون $24 = 12 \times 2$ ، $10 = 5 \times 2$ و $26 = 13 \times 2$ و اعداد ۵، ۱۲ و ۱۳ یکی از معروف ترین اعداد فیثاغورسی در هندسه هستند، بنابراین اعداد داده شده نیز اضلاع یک مثلث قائم الزاویه هستند و محل تلاقی ارتفاع ها همان رأس قائمه است، پس باید فاصله محل تلاقی میانه ها را تا رأس قائمه به دست آوریم. از طرفی می دانیم که در یک مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است. پس:

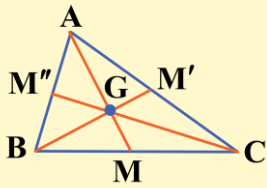


$$AM = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 26 = 13$$

از طرف دیگر میانه ها در هر مثلث همدیگر را به نسبت $\frac{2}{3}$ از رأس و $\frac{1}{3}$ از پای میانه قطع می کنند. بنابراین اگر G محل تلاقی میانه ها باشد، آن گاه:

$$AG = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \times 13 = \frac{26}{3}$$

مرکز ثقل یا همان محل برخورد میانه‌ها (G) طول هر میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند، بنابراین:



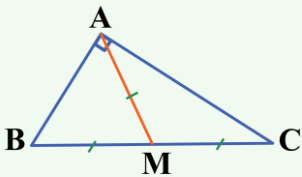
$$GM = \frac{1}{3}AM \text{ و } AG = \frac{2}{3}AM$$

$$GM' = \frac{1}{3}BM' \text{ و } BG = \frac{2}{3}BM'$$

$$GM'' = \frac{1}{3}CM'' \text{ و } CG = \frac{2}{3}CM''$$

میانه وارد بر وتر

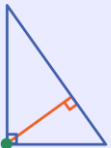
اگر در یک مثلث میانه وارد بر یک ضلع، برابر نصف طول آن ضلع باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه بوده و آن ضلع نیز وتر است.



$$AM = BM = MC = \frac{BC}{2} \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

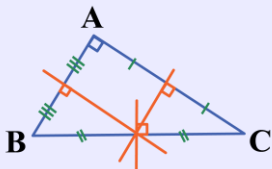
محل تلاقی ارتفاع‌ها و عمودمنصف‌ها در مثلث قائم‌الزاویه

در مثلث قائم‌الزاویه محل برخورد ارتفاع‌ها روی محیط مثلث، در واقع روی رأس قائمه قرار می‌گیرد.



محل برخورد ارتفاع‌ها

در مثلث قائم‌الزاویه محل هم‌رسی عمودمنصف‌ها روی محیط مثلث، در واقع وسط وتر قرار دارد.



میانبر سه‌تایی فیثاغورسی رو که بلدی نه؟

چند دسته عدد پرتکرار داریم که در رابطه فیثاغورس صدق می‌کنند و بهتر است همیشه آن‌ها را حفظ باشیم. این چند دسته عبارتند از:

$$۳, ۴, ۵ \longrightarrow ۳^2 + ۴^2 = ۵^2$$

$$۸, ۱۵, ۱۷ \longrightarrow ۸^2 + ۱۵^2 = ۱۷^2$$

$$۵, ۱۲, ۱۳ \longrightarrow ۵^2 + ۱۲^2 = ۱۳^2$$

$$۹, ۴۰, ۴۱ \longrightarrow ۹^2 + ۴۰^2 = ۴۱^2$$

این روش میانبر برای حذف محاسبات مربوط به رابطه فیثاغورس و سرعت عمل بیشتر است. وقتی دو عدد از بین این ۳ تا را داشته باشیم می‌توانیم بدون محاسبه، سومی را به‌دست بیاوریم.

k برابر سه‌تایی‌های فیثاغورسی هم فیثاغورسی‌اند!

این نکته تکمیلی رو هم برای اونایی که دیگه خیلی می‌خوان خفن باشن بگیریم. اگه k به عدد صحیح باشه داریم:

$$(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$$

$$(5k)^2 + (12k)^2 = (13k)^2$$

$$(2 \times 3)^2 + (2 \times 4)^2 = (2 \times 5)^2 \Rightarrow 6^2 + 8^2 = 10^2$$

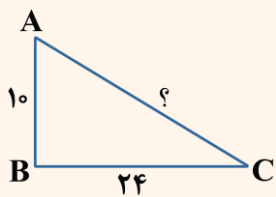
مثلا:

تذکره!

توجه داشته باشید که هر ۳ عدد باید در یک ضریب یکسان ضرب شوند، تا همچنان رابطه فیثاغورس برقرار باشد.

یه نمونه باحال ببین!

برای به دست آوردن طول ضلع AC با دقت به طول دو ضلع دیگر می‌بینیم:



$$10 = 2 \times 5$$

$$24 = 2 \times 12$$

پس با سه‌تایی فیثاغورسی ۵، ۱۲ و ۱۳ سر و کار داریم که همگی دو برابر شده‌اند. در نتیجه عدد سوم برابر است با:

$$2 \times 13 = 26$$



۲۵- در یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $2\sqrt{3}$ از نقطه‌ای دلخواه درون مثلث عمودهایی بر سه ضلع رسم می‌کنیم، مجموع طول این سه عمود کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

(آسان - خط‌به‌خط - سریع) - هندسه ۱ صفحه ۶۸ - ۱۰۰۳

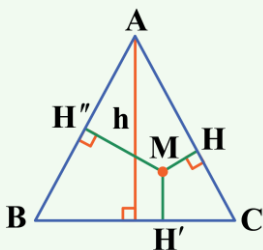
پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم که اگر از هر نقطه دلخواه درون مثلث متساوی‌الاضلاع عمودهایی بر سه ضلع رسم کنیم، مجموع طول سه عمود برابر با ارتفاع مثلث است، بنابراین:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{3}) = 3$$

مجموع فواصل هر نقطه داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع مثلث

مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع مثلث برابر با **ارتفاع** مثلث است. اگر طول ضلع مثلث زیر a باشد:



$$MH + MH' + MH'' = h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$



۲۶- اضلاع یک کایت ۱۷ و ۱۰ و اندازه قطر کوچک آن ۱۶ است. مساحت این کایت چقدر است؟

(۴) ۲۲۴

(۳) ۲۰۰

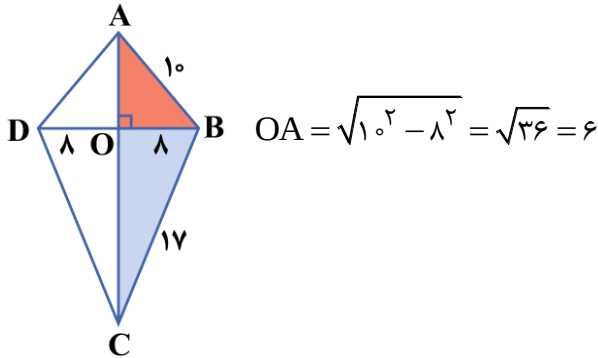
(۲) ۱۸۴

(۱) ۱۶۸

(آسان - خطبه خط - سریع) - هندسه ۱ صفحه‌های ۶۵ و ۷۲ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم که در کایت، یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است. بنابراین با توجه به شکل زیر می‌توان گفت که قطر AC عمودمنصف قطر BD است، در نتیجه $OD = OB = ۸$ از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه OAB ضلع OA با کمک فیثاغورس به دست می‌آید:



و در مثلث قائم‌الزاویه OBC نیز به کمک فیثاغورس $OC = ۱۵$ به دست می‌آید:

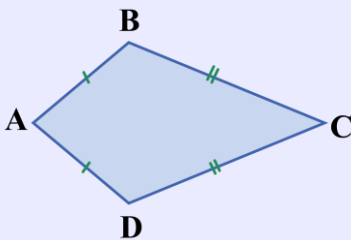
$$OC = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15 \Rightarrow AC = 6 + 15 = 21$$

بنابراین مساحت کایت برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}(AC \times BD) = \frac{1}{2}(21 \times 16) = 168$$

کایت

چهارضلعی که دو ضلع مجاور آن با هم برابر و دو ضلع مجاور دیگر نیز با هم برابرند ولی اضلاع مقابل نابرابرند، کایت نامیده می‌شود.

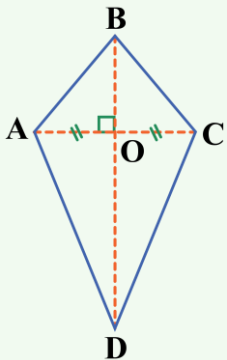


$$AB = AD$$

$$BC = CD$$

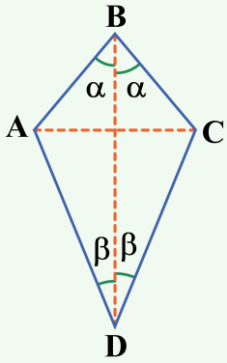
ویژگی‌های کایت

۱) در هر کایت، قطر بزرگ عمودمنصف قطر کوچک است ولی قطر کوچک، قطر بزرگ را نصف نمی‌کند.



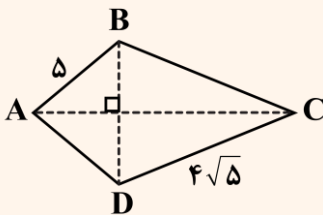
BD عمودمنصف AC است.

۲) در هر کایت، قطر بزرگ نیمساز زاویه است ولی قطر کوچک نیمساز زاویه نیست.



BD نیمساز زوایای B و D است.

یه نمونه باحال ببین!



در یک کایت اندازه اضلاع $4\sqrt{5}$ و ۵ و اندازه قطر بزرگ ۱۱ است، اندازه قطر کوچک کدام است؟

۸ (۲)

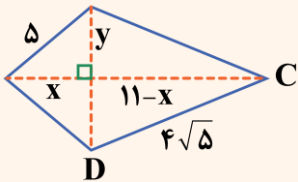
۶ (۱)

۵ (۴)

۱۰ (۳)

پاسخ تشریحی:

اندازه قطر کوچک کایت را $2y$ فرض می‌کنیم. می‌دانیم که قطر بزرگ کایت عمود منصف قطر کوچک آن است. حال با توجه به شکل، رابطه فیثاغورس را در دو مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:



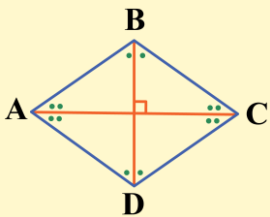
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (11-x)^2 + y^2 = 80 \end{cases} \Rightarrow 121 - 22x = 55 \Rightarrow 22x = 66 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 4$$

بنابراین اندازه قطر کوچک کایت برابر با $d = 2y = 8$ است.

پاسخ: گزینه ۲

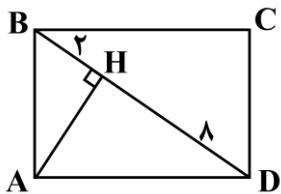
مساحت چهارضلعی‌ها با قطرهای عمود برهم

مساحت چهارضلعی‌ای که قطرهای آن برهم عمود باشند برابر با نصف حاصل ضرب دو قطر است.



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AC \times BD)$$





۲۷- با توجه به شکل مقابل، مساحت مستطیل ABCD کدام است؟

- (۱) ۲۰
(۲) ۳۰
(۳) ۴۰
(۴) ۶۰

(آسان - ترکیبی - استاندارد) - هندسه ۱ صفحه ۶۵ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۳

مثلث ABD قائم‌الزاویه است و AH ارتفاع وارد بر وتر محسوب می‌شود، بنابراین واسطه هندسی بین دو قطعه ایجاد شده روی وتر است:

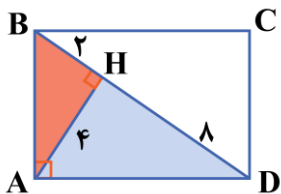
$$AH^2 = 2 \times 8 = 16 \Rightarrow AH = 4$$

روش اول

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = 2\left(\frac{1}{2}AH \times BD\right) = 4 \times (2 + 8) = 40$$

روش دوم

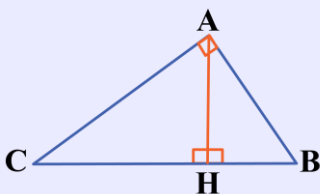
در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABH و AHD طبق فیثاغورس داریم:



$$\begin{aligned} AB^2 &= 2^2 + 4^2 = 20 \Rightarrow AB = 2\sqrt{5} \\ AD^2 &= 4^2 + 8^2 = 80 \Rightarrow AD = 4\sqrt{5} \\ S &= (2\sqrt{5})(4\sqrt{5}) = 40 \end{aligned}$$

روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

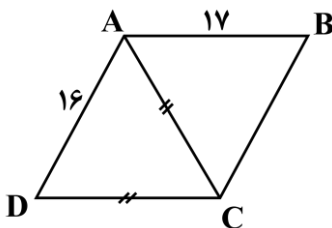
در مثلث قائم‌الزاویه ABC روابط زیر را روابط طولی می‌نامیم، زیرا با اندازه‌های اضلاع سروکار دارند.



- ۱) $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ۲) $AH \times BC = AB \times AC$ ۳) $AH^2 = BH \times HC$
۴) $AB^2 = BH \times BC$ ۵) $AC^2 = CH \times BC$



۲۸- مساحت متوازی‌الاضلاع شکل مقابل که قطر کوچک آن با ضلع بزرگ متوازی‌الاضلاع برابر است، کدام است؟

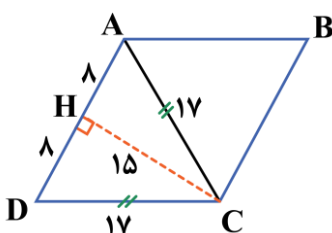


- (۱) ۲۶۰
(۲) ۲۸۰
(۳) ۲۴۰
(۴) ۳۰۰

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۱ صفحه ۶۵ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۳

در مثلث متساوی‌الساقین ACD ارتفاع وارد بر قاعده را رسم می‌کنیم که میانه نیز هست. بنابراین:



$$AH = DH = 8$$

حال طبق فیثاغورس در مثلث AHC یا DHC، $CH = ۱۵$ به دست می‌آید، حال که ارتفاع متوازی الاضلاع مشخص شده، مساحت آن برابر است با:

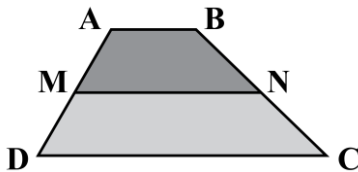
$$S = CH \times AD = ۱۵ \times ۱۶ = ۲۴۰$$

جرقه ذهنی!

در هندسه هرگاه مثلث متساوی الساقین دیدید همین‌طور الکی ارتفاع را رسم کنید در ۹۰ درصد موارد مسئله حل می‌شود! اگر نشد مجدد فکر می‌کنیم!



۲۹- در شکل مقابل، پاره‌خط MN به طول ۱۰ وسط‌های دو ساق دوزنقه ABCD را به هم وصل کرده است، اگر مساحت دوزنقه ABNM ۶۰ درصد مساحت دوزنقه MNCD باشد، اختلاف طول قاعده‌های دوزنقه چقدر است؟



۵ (۱)

۶ (۲)

۸ (۳)

۱۰ (۴)

(سخت - خط به خط / محاسباتی - زمان ۵ - هندسه ۱ صفحه ۶۵ - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

پاره‌خط MN خط میانگین دوزنقه است و اگر قاعده کوچک را a و قاعده بزرگ را b فرض کنیم، ارتفاع هر دو دوزنقه ABNM و MNCD با هم برابر است و خواهیم داشت:

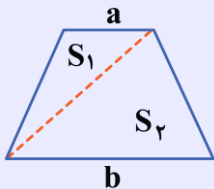
$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = ۱۰ \Rightarrow a+b=۲۰ \\ S_{ABNM} = \frac{۶۰}{۱۰۰} (S_{MNCD}) \Rightarrow \frac{1}{2} \left(a + \frac{a+b}{2} \right) \times h = \frac{۶}{۱۰} \left(\frac{1}{2} \left(b + \frac{a+b}{2} \right) \times h \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=۲۰ \\ \frac{3a+b}{5} = \frac{3(b+a)}{5} \Rightarrow \begin{cases} a+b=۲۰ \\ ۱۵a+۵b=۹b+۳a \Rightarrow ۱۲a=۴b \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=۲۰ \\ b=۳a \end{cases} \Rightarrow ۴a=۲۰ \Rightarrow a=۵, b=۱۵ \Rightarrow b-a=۱۰$$

تقسیم مساحت در دوزنقه

در هر دوزنقه، هر قطر مساحت را به نسبت قاعده‌ها تقسیم می‌کند.

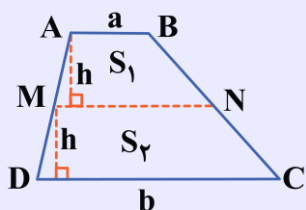


$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}$$

اگر دو قطر یک دوزنقه را رسم کنیم، چهار مثلث ایجاد می‌شود که مساحت آن‌ها را در دو حالت مختلف به صورت زیر حساب می‌کنیم:

نسبت اندازه قاعده‌ها معلوم باشد. $\frac{b}{a} = k$	اندازه قاعده‌ها معلوم باشد.

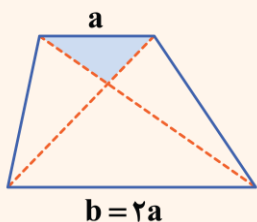
خطی که وسط‌های دو ساق دوزنقه را به هم وصل می‌کند، **میانگین** دو قاعده است و دوزنقه را به دو دوزنقهٔ **هم‌ارتفاع** تقسیم می‌کند، در نتیجه:



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{ra + b}{rb + a}$$

یه نمونه باحال بین!

در شکل زیر، قاعدهٔ بزرگ دوزنقه دو برابر قاعدهٔ کوچک است. مساحت ناحیهٔ رنگ‌شده، چه کسری از مساحت دوزنقه است؟



$$\frac{1}{\lambda} (r$$

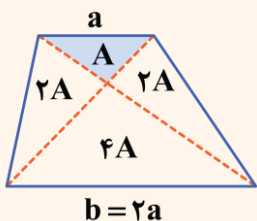
$$\frac{1}{6} (1)$$

$$\frac{1}{9} (P$$

$\frac{r}{9} (\mu$

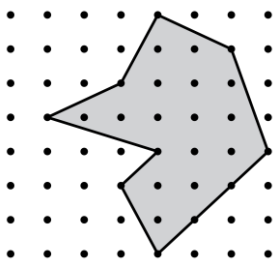
یاسخ تشریحی:

از آنجا که قاعدهٔ بزرگ ۲ برابر قاعدهٔ کوچک است، یعنی $\frac{b}{a} = k = 2$ است. در نتیجه خواهیم داشت:



$$\Rightarrow S_{\text{کل}} = A + 2A + 2A + 4A = 9A \Rightarrow \frac{S_{\text{زنگی}}}{S_{\text{کل}}} = \frac{A}{9A} = \frac{1}{9}$$

یاسخ: گزینہ ۴



۳۰- مساحت چند ضلعی شبکه‌ای شکل مقابل کدام است؟

19 (1)

1A (2)

17 (3)

16 (۴)

(آسان۔ خط بہ خط۔ سریع ۵)۔ ہندسہ ۱ صفحہ ۷۰-۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

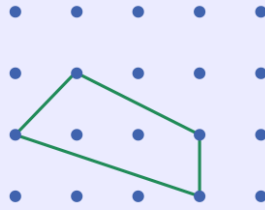
می‌دانیم اگر i تعداد نقاط درونی و b تعداد نقاط مرزی یک چندضلعی شبکه‌ای باشد، مساحت آن از رابطه $S = \frac{b}{2} + i - 1$ به دست می‌آید، بنابراین در این سؤال $b = 10$ و $i = 15$ می‌باشد. در نتیجه:

$$S = \frac{b}{r} + i - 1 = \frac{10}{2} + 15 - 1 = 19$$

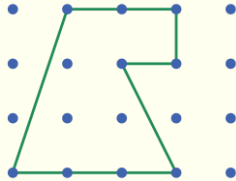
چند ضلعی های شبکه ای

مطابق شکل، نقطه‌هایی که روی خط‌های افقی و عمودی واقع‌اند به‌طوری که فاصله هر دو نقطه متوالی روی یک خط افقی یا خط عمودی برابر یک واحد باشد را «**نقاط شبکه‌ای**» می‌نامند.

اگر یک چندضلعی، تمام رأس‌هایش روی نقاط شبکه‌ای باشند، «**چندضلعی شبکه‌ای**» نامیده می‌شود.

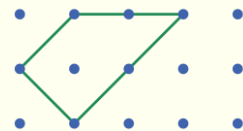


(۲) نقاط واقع در درون چندضلعی شبکه‌ای را «نقاط درونی» می‌نامند و تعداد آن‌ها را با i نشان می‌دهند.



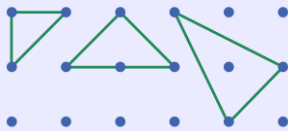
$$i = 3 = \text{تعداد نقاط درونی}$$

(۱) نقاط شبکه‌ای واقع بر رأس‌ها و ضلع‌های چندضلعی را «نقاط مرزی» می‌نامند و تعداد آن‌ها را با b نشان می‌دهند.



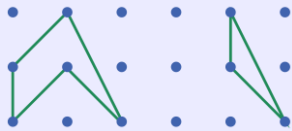
$$b = 6 = \text{تعداد نقاط مرزی}$$

تعداد نقاط مرزی چندضلعی‌های شبکه‌ای هرگز کمتر از ۳ نمی‌تواند باشد یا به عبارت دیگر، هر چندضلعی شبکه‌ای حداقل ۳ نقطه مرزی دارد.



$$b \geq 3 \Rightarrow \text{چندضلعی شبکه‌ای}$$

چندضلعی‌های شبکه‌ای می‌توانند نقطه درونی نداشته باشند یا به عبارت دیگر تعداد نقاط درونی چندضلعی‌های شبکه‌ای حداقل صفر است.

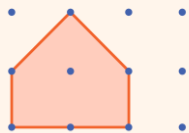


$$i \geq 0 \Rightarrow \text{چندضلعی شبکه‌ای}$$

اگر b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی چندضلعی شبکه‌ای باشد، مساحت آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \quad \text{فرمول پیک}$$

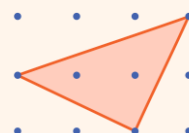
چند نمونه باحال ببین!



$$\begin{cases} b = 6 \\ i = 1 \end{cases} \Rightarrow S = \frac{6}{2} + 1 - 1 = 3$$



$$\begin{cases} b = 5 \\ i = 0 \end{cases} \Rightarrow S = \frac{5}{2} + 0 - 1 = 1/2$$



$$\begin{cases} b = 3 \\ i = 2 \end{cases} \Rightarrow S = \frac{3}{2} + 2 - 1 = 2/2$$



برای دیدن پاسخ‌نامه ویدئویی آزمون
QR Code بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید!

فیزیک ۱: دما و گرما
صفحه‌های ۸۳ تا ۱۲۶

بودجه‌بندی
این آزمون

درمجموع ۲ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور

۳۱- دمای جسمی برحسب کلوین، ۸ برابر دمای آن برحسب درجه سلسیوس است. دمای این جسم چند درجه سلسیوس است؟
(۱) -۳۰ (۲) ۳۹ (۳) ۲۴۰ (۴) ۳۱۲

(آسان - محاسباتی - سریع - صفحه ۸۴ - ۱۰۰۴)

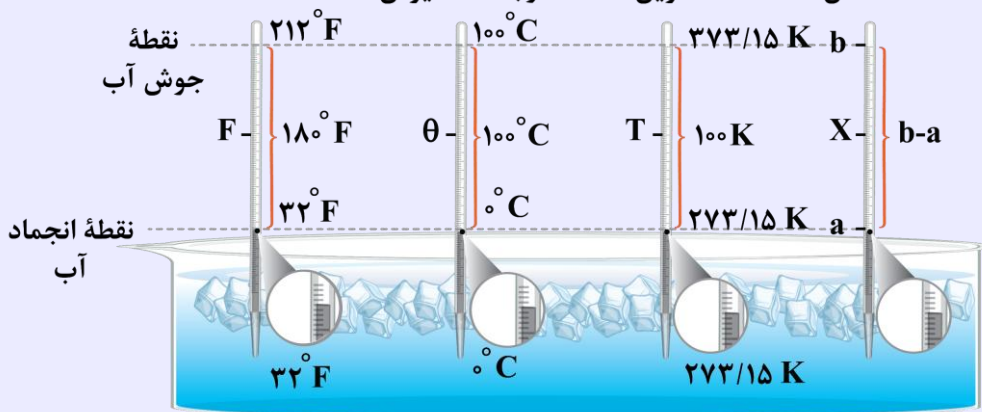
پاسخ: گزینه ۲

با توجه به رابطه بین مقیاس کلوین و سلسیوس داریم:

$$T = \theta + 273 \xrightarrow{T=8\theta} 8\theta = \theta + 273 \Rightarrow 7\theta = 273 \Rightarrow \theta = 39^\circ\text{C}$$

رابطه خطی بین دماسنج‌ها

درجه‌بندی دماسنج‌های مختلف به صورت خطی انجام می‌گردد؛ پس بین تغییرات دما در مقیاس‌های مختلف می‌توان از نسبت و تناسب خطی استفاده کرد.



$$\frac{\theta - 0}{100 - 0} = \frac{T - 273}{373 - 273} = \frac{F - 32}{212 - 32} = \frac{X - a}{b - a}$$

جدول مربوط به نتایج نهایی از رابطه خطی بین دماسنج‌ها:

دما	نماد	یکا	تبدیل	تغییر دما
دما برحسب درجه سلسیوس	θ	$^\circ\text{C}$		
دما برحسب کلوین	T	K	$T = \theta + 273$	$\Delta T = \Delta \theta$
دما برحسب درجه فارنهایت	F	$^\circ\text{F}$	$F = \frac{9}{5}\theta + 32$	$\Delta F = \frac{9}{5}\Delta \theta$

نکات

- ۱- کم‌ترین دمای ممکن، صفر کلوین است که برابر ۲۷۳/۱۵- درجه سلسیوس است، اما برای دما حد بالایی وجود ندارد.
- ۲- همواره عدد دمای یک جسم برحسب کلوین بیشتر از عدد دمای آن جسم برحسب درجه سلسیوس است.
- ۳- دما در مقیاس کلوین همواره نامنفی است.
- ۴- تغییر دما در مقیاس‌های درجه سلسیوس و کلوین باهم برابرند. ($\Delta T = \Delta \theta$)
- ۵- در هیچ دمایی، دماسنج‌های درجه سلسیوس و کلوین عدهای یکسان نشان نمی‌دهند.



تذکر

در دمای -40°C درجه سلسیوس مقیاس درجه فارنهایت نیز -40°F را نشان می‌دهد.



تذکر

برای تبدیل مقیاس درجه فارنهایت به کلوین، ابتدا درجه فارنهایت را به درجه سلسیوس تبدیل کرده و سپس به کلوین تبدیل می‌کنیم.



یه نمونه باحال

دماسنجی دمای یک جسم را 35°C نشان می‌دهد. دمای این جسم چند کلوین و چند درجه فارنهایت است؟

پاسخ تشریحی:

$$T = \theta + 273 \Rightarrow T = 35 + 273 = 308\text{K}$$

$$F = \frac{9}{5}\theta + 32 = \frac{9}{5} \times 35 + 32 = 95^{\circ}\text{F}$$



۳۲- در یک آزمایشگاه تحقیقاتی، دماسنجی ساخته شده است که دمای 27°C را با عدد 50 و دمای 167°F را با عدد 122 نشان می‌دهد. چه دمایی برحسب این دماسنج جدید، معادل کمترین دمای ممکن جهان (صفر کلوین) است؟

- (۱) -350 (۲) -380 (۳) -400 (۴) -450

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۱ - صفحه ۸۵ - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۳



گام اول

ابتدا تمام دماهای داده شده را به یک واحد استاندارد (درجه سلسیوس) تبدیل می‌کنیم.

دمای اول: $\theta_1 = 27^{\circ}\text{C}$

دمای دوم: باید 167°F را به سلسیوس تبدیل کنیم:

$$F = \frac{9}{5}\theta + 32 \Rightarrow \theta_F = \frac{5}{9}(F - 32) \Rightarrow \theta_F = \frac{5}{9} \times (167 - 32) \Rightarrow \theta_F = \frac{5}{9} \times 135 = 5 \times 15 = 75^{\circ}\text{C}$$



گام دوم

اکنون تغییرات درجه بندی دماسنج جدید (X) را نسبت به تغییرات دمای سلسیوس (θ) محاسبه می‌کنیم (شیب خط):

$$\frac{\Delta x}{\Delta \theta} = \frac{x_2 - x_1}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{122 - 50}{75 - 27} \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta \theta} = \frac{72}{48} = \frac{3}{2} = 1/5$$

یعنی به ازای هر 1 درجه سلسیوس، دماسنج جدید $1/5$ درجه تغییر می‌کند.



گام سوم

دمای هدف، صفر کلوین است که معادل -273°C می‌باشد.

تغییر دما نسبت به حالت اول (27°C) را حساب می‌کنیم:

$$\Delta \theta_{\text{کل}} = \theta_{\text{هدف}} - \theta_1 = -273 - 27 = -300^{\circ}\text{C}$$



گام آخر

تغییر دمای معادل در دماسنج جدید را به دست آورده و با عدد اولیه جمع می‌کنیم:

$$\Delta x = 1/5 \times \Delta \theta_{\text{کل}} = 1/5 \times (-300) = -450$$

$$x_{\text{نهایی}} = 50 + (-450) = -400$$



دماسنج

درجه‌بندی دماسنج‌های مختلف به صورت خطی انجام می‌گردد، پس بین تغییرات دما در مقیاس‌های مختلف می‌توان از نسبت و تناسب خطی استفاده کرد؛ بنابراین اگر دماهای $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ در مقیاس (۱) به ترتیب متناظر با دماهای X_1, X_2, X_3 در مقیاس (۲) باشند، مانند شکل مقابل می‌توان چنین نوشت:

مقیاس (۲) مقیاس (۱)

$$\begin{array}{l} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array}$$

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{X_2 - X_1} = \frac{\theta_3 - \theta_2}{X_3 - X_2}$$



دماسنج مجهول

برای پیدا کردن رابطه یک دماسنج مجهول به شیوه زیر عمل می‌کنیم:

برای مثال یک دماسنج (دماسنج مجهول یا X) دمای ذوب یخ را 20° واحد و دمای جوش آب را 220° واحد نشان می‌دهد. رابطه آن را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} \theta_1 = 0^\circ\text{C} \Rightarrow x_1 = 20 \\ \theta_2 = 100^\circ\text{C} \Rightarrow x_2 = 220 \end{cases} \Rightarrow \Delta\theta = 100^\circ\text{C}, \Delta x = 200 \Rightarrow m = \frac{\Delta x}{\Delta\theta} = \frac{200}{100} = 2$$

دقیقاً مثل این‌که معادله یک خط را در ریاضی حساب می‌کردیم.

ابتدا شیب خط را حساب می‌کنیم سپس (با جایگذاری یکی از نقاط، عرض از مبدأ را حساب می‌کنیم):

$$x = m\theta + x_0 \Rightarrow x = 2\theta + 20$$

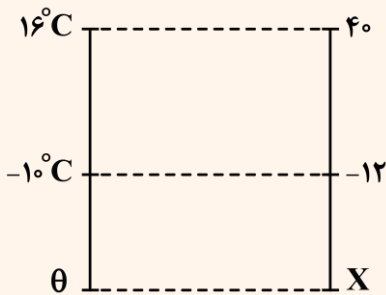


به نمونه باحال

دماسنجی دمای 16°C را 40° و 10°C را -12° نشان می‌دهد. اگر دمای این دماسنج را x و دمای فارنهایت را F بنامیم، رابطه بین x و F را به دست آورید؟

پاسخ تشریحی:

ابتدا به کمک دو دمای معلوم داده شده، رابطه بین دما برحسب درجه سلسیوس (θ) و دمای دماسنج مجهول (x) را محاسبه می‌کنیم:



$$\Rightarrow \frac{\theta - (-10)}{16 - (-10)} = \frac{x - (-12)}{40 - (-12)} \Rightarrow 2\theta + 20 = x + 12 \Rightarrow \theta = \frac{x - 8}{2} = \frac{x}{2} - 4$$

در آخر θ را در رابطه بین θ و F جایگذاری می‌کنیم:

$$F = \frac{9}{5}\theta + 32 \xrightarrow{\theta = \frac{x}{2} - 4} F = \frac{9}{5}\left(\frac{x}{2} - 4\right) + 32 = \frac{9}{5} \times \frac{x}{2} - \frac{9}{5} \times 4 + 32 \Rightarrow F = \frac{9}{10}x + \frac{224}{5}$$



۳۲- طول یک میله آهنی در دمای صفر درجه سلسیوس، ۸cm بیشتر از طول یک میله نقره‌ای در همان دما است. طول اولیه میله نقره‌ای در دمای صفر درجه سلسیوس چند سانتی‌متر باشد تا اختلاف طول آن‌ها در هر دمایی همان ۸cm باقی بماند؟

$$\left(\alpha_{\text{آهن}} = 1/2 \times 10^{-5} \frac{1}{K}, \alpha_{\text{نقره}} = 1/8 \times 10^{-5} \frac{1}{K} \right)$$

۳۲ (۴)

۲۴ (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۱ - صفحه ۸۸ - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

شرط این که اختلاف طول میله‌ها در هر دمایی ثابت بماند آن است که تغییر طول آن‌ها برابر باشد، پس داریم:

$$\Delta L_{\text{آهن}} = \Delta L_{\text{نقره}} \Rightarrow L_{\text{آهن}} \alpha_{\text{آهن}} \Delta \theta = L_{\text{نقره}} \alpha_{\text{نقره}} \Delta \theta \Rightarrow L_{\text{آهن}} \times 1/2 \times 10^{-5} = L_{\text{نقره}} \times 1/8 \times 10^{-5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_{\text{آهن}} = 1/5 L_{\text{نقره}} \\ L_{\text{آهن}} = L_{\text{نقره}} + 8\text{cm} \end{cases} \Rightarrow L_{\text{نقره}} = 16\text{cm}$$

سوتی‌های پرتکرار

اگر حواستان نباشد و طول اولیه میله آهنی رو به دست آوردید، در دام گزینه (۳) می‌افتید!

انبساط طولی (خطی)

اگر دمای یک میله را به اندازه ΔT تغییر دهیم، تغییر طول میله از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta T \Rightarrow L_2 = L_1 (1 + \alpha \Delta T)$$

در این رابطه باید یکای L_1 و L_2 و ΔL در دو طرف معادله باهم سازگار باشند.

α : ضریب انبساط طولی است که یکای آن $\frac{1}{K}$ یا $\frac{1}{^\circ C}$ است.

ضریب انبساط طولی جسم جامد:

افزایش طول بر واحد طول یک جسم جامد به ازای یک کلوین (یک درجه سلسیوس) افزایش دما را ضریب انبساط طولی آن جسم می‌نامند و آن را با α نشان می‌دهند.

عوامل مؤثر بر انبساط طولی:

- ۱- هرچه طول اولیه میله بلندتر باشد، به ازای یک تغییر دمای مشخص، افزایش طول آن بیشتر خواهد بود.
- ۲- هرچه تغییر دمای میله فلزی بیشتر باشد، افزایش طول آن بیشتر است.
- ۳- اگر دمای دو میله هم‌اندازه که جنس‌های آن‌ها باهم متفاوت است را به یک اندازه افزایش دهیم، میزان افزایش طول آن‌ها متفاوت خواهد بود.

عوامل مؤثر بر ضریب انبساط طولی:

- ۱- جنس ماده
- ۲- دما (به دلیل وابستگی کم ضریب انبساط طولی به دما در محاسبات معمولی، این اثر نادیده گرفته می‌شود).

در سؤالات مربوط به انبساط طولی، سه چیز ممکن است پرسیده شود:

الف) طول جسم چند برابر شده است؟

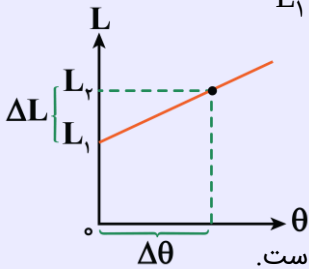
$$L_2 = L_1 (1 + \alpha \Delta \theta) \Rightarrow \text{چند برابر شدن طول جسم} : \frac{L_2}{L_1} = 1 + \alpha \Delta \theta$$

ب) طول جسم چقدر تغییر کرده است؟

$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta \theta \quad \text{تغییر طول جسم}$$

ج) طول جسم چند درصد تغییر کرده است؟

$$\text{درصد تغییر طول جسم} = \alpha \Delta \theta \times 100 \Rightarrow \frac{\Delta L}{L_1} \times \underbrace{(100)}_{\text{تبدیل به درصد}} = \frac{L_1 \alpha \Delta \theta}{L_1} \times 100$$



نمودار طول جسم برحسب دما مطابق شکل زیر است:

$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta \theta \Rightarrow \text{شیب نمودار} = \frac{\Delta L}{\Delta \theta} = L_1 \alpha$$

بنابراین شیب نمودار طول برحسب دما برابر $L_1 \alpha$ است که هم به جنس جسم و هم به طول اولیه آن وابسته است.



۳۴- ضریب انبساط حجمی یک مایع برابر با $\frac{1}{K} \times 10^{-4}$ است. اگر دمای مایع برحسب درجه سلسیوس، ۶ برابر شود، حجم مایع ۵

درصد افزایش می‌یابد. دمای اولیه این مایع چند درجه سلسیوس بوده است؟

۵۰ (۴)

۲۵ (۳)

۲۰ (۲)

۱۰ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۵ - صفحه ۹۳ - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

گام اول

با توجه به رابطه انبساط حجمی داریم:

$$\text{درصد افزایش حجم} = \frac{\Delta V}{V_1} \times 100 \Rightarrow 5 = \frac{V_1 \beta \Delta \theta}{V_1} \times 100 \Rightarrow 5 = 4 \times 10^{-4} \times \Delta \theta \times 100 \Rightarrow \Delta \theta = 125^\circ \text{C}$$

گام آخر

دمای اولیه مایع برابر است با:

$$\theta_2 - \theta_1 = 125 \Rightarrow 6\theta_1 - \theta_1 = 125 \Rightarrow \theta_1 = 25^\circ \text{C}$$

انبساط حجمی جامدات

اگر دمای جسمی به اندازه $\Delta \theta$ تغییر کند، تغییرات حجم جسم به کمک روابط زیر قابل محاسبه است:

$$V_2 = V_1 (1 + \beta \Delta \theta)$$

$$\text{چند برابر شدن حجم: } \frac{V_2}{V_1} = 1 + \beta \Delta \theta = 1 + 3\alpha \Delta \theta$$

$$\text{مقدار تغییر حجم: } \Delta V = V_1 \beta \Delta \theta = V_1 (3\alpha) \Delta \theta$$

$$\text{درصد تغییر حجم: } \frac{\Delta V}{V_1} \times (100) = \beta \Delta \theta \times 100 = 3\alpha \Delta \theta \times 100$$

نکته

دقت کنید که ضریب انبساط حجمی (β) بیشتر جامدات، با تقریب مناسبی سه برابر ضریب انبساط طولی (α) آن‌ها است. ($\beta = 3\alpha$)

ضریب انبساط حجمی جسم جامد

افزایش حجم در واحد حجم یک جسم جامد به ازای یک کلوین (یک درجه سلسیوس) افزایش دما را ضریب انبساط حجمی آن جسم

می‌نامند و آن را با β نشان می‌دهند و تقریباً ۳ برابر ضریب انبساط طولی آن جسم می‌باشد و یکای آن $\frac{1}{K}$ یا $\frac{1}{^\circ \text{C}}$ می‌باشد.

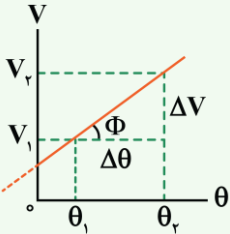
انبساط حجمی مایعات

چون مایع‌ها شکل معینی ندارند، انبساط آن‌ها فقط به صورت حجمی قابل بررسی است. برای محاسبه تغییر حجم مایعات بر اثر افزایش دما، می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\Delta V_{\text{مایع}} = V_1 \beta \Delta \theta$$



نمودار تغییر حجم یک جسم با ضریب انبساط حجمی β بر حسب دمای آن به صورت شکل زیر خواهد بود (برای تغییر دماهای نه چندان زیاد):



$$\tan \Phi = \frac{\Delta V}{\Delta \theta} = V_1 \beta$$



۳۵- چگالی آهن در دمای صفر درجه سلسیوس برابر با $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ۸۰۰۰ است. در دمای چند درجه سلسیوس چگالی آهن برابر با

$$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ۷۹۲۸ \text{ می‌شود؟ } \left(\alpha_{\text{آهن}} = ۱۲ \times ۱۰^{-۶} \text{ } ^\circ\text{C}^{-۱} \right)$$

۲۵۰ (۴)

۱۲۵ (۳)

۱۰۰ (۲)

۵۰ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۹۴ - ۱۰۰۴

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به رابطه تغییرات چگالی بر حسب تغییرات دما داریم:

$$\rho_2 = \rho_1 (1 - \alpha \Delta \theta) \Rightarrow \Delta \rho = -\rho_1 (\alpha \Delta \theta)$$

$$\Rightarrow -۷۲ = -۸۰۰۰ \times ۳۶ \times ۱۰^{-۶} \Delta \theta \Rightarrow \Delta \theta = \frac{۷۲ \times ۱۰^۶}{۸۰۰۰ \times ۳۶} = \frac{۲۰۰۰}{۸} = ۲۵۰ \Rightarrow \theta_2 = ۲۵۰^\circ\text{C}$$

اثر تغییر دما بر روی چگالی

با افزایش دما به طور معمول، حجم افزایش یافته و چگالی کاهش می‌یابد. رابطه چگالی با تغییر دما به صورت $\rho_2 = \frac{\rho_1}{1 + \beta \Delta T}$ است که می‌توان با تقریب مناسبی از رابطه $\rho_2 = \rho_1 (1 - \beta \Delta T)$ نیز استفاده کرد.

اثبات:

چگالی یک جسم جامد نیز با تغییر دما، تغییر می‌کند. می‌توان با استفاده از فرمول تغییر حجم، فرمول چگالی را بر حسب تغییر دما به دست آورد.

$$\begin{cases} \rho_2 = \frac{m}{V_2} \Rightarrow V_2 = \frac{m}{\rho_2} \\ \rho_1 = \frac{m}{V_1} \Rightarrow V_1 = \frac{m}{\rho_1} \end{cases} \Rightarrow V_2 = V_1 (1 + \beta \Delta \theta) \Rightarrow \frac{m}{\rho_2} = \frac{m}{\rho_1} (1 + \beta \Delta \theta) \Rightarrow \rho_2 = \frac{\rho_1}{1 + \beta \Delta \theta}$$

اگر صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{1 + \beta \Delta \theta} \times \frac{1 - \beta \Delta \theta}{1 - \beta \Delta \theta} = \rho_1 \times \frac{1 - \beta \Delta \theta}{1 - (\beta \Delta \theta)^2}$$

با توجه به این که ضریب انبساط حجمی یک جسم، عدد بسیار کوچکی است، وقتی به توان ۲ برسد، بسیار کوچکتر می‌شود و همچنین $(\beta \Delta \theta)^2$ در مقایسه با عددهایی که با آن جمع و تفریق می‌شوند بسیار ناچیز بوده و می‌توان از آن صرف نظر کرد.

$$\rho_2 = \rho_1 \times \frac{1 - \beta \Delta \theta}{1 - (\beta \Delta \theta)^2} \approx \rho_1 (1 - \beta \Delta \theta) \Rightarrow \rho_2 \approx \rho_1 (1 - \beta \Delta \theta)$$



درصد تغییر چگالی در اثر تغییر دما، از رابطه زیر حساب می‌شود:

$$\text{درصد تغییر چگالی} = \frac{\Delta \rho}{\rho_1} \times 100 \approx -100 \beta \Delta T$$



۳۶- از ۵۰۰g آب ۱۲°C مقدار ۲۱kJ گرما می‌گیریم. چگالی آب چگونه تغییر می‌کند؟ ($c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$)

- (۱) کاهش می‌یابد. (۲) افزایش می‌یابد.
(۳) ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. (۴) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

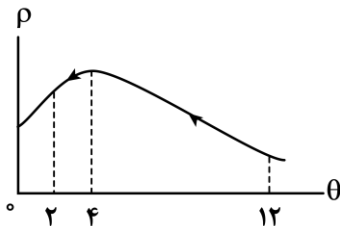
(آسان - استدلالی - استاندارد ۵ - صفحه ۹۸ - ۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۴

تغییرات دمای آب برابر است با:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow -21000 = 0.5 \times 4200 \times \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = -10^\circ\text{C} \Rightarrow \theta_f - 12 = -10 \Rightarrow \theta_f = 2^\circ\text{C}$$

از آن جا که انبساط آب، غیرعادی است. نمودار تغییرات چگالی آب بر حسب دما به شکل زیر است:

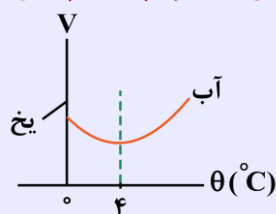
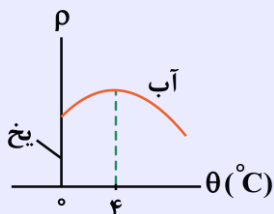


مشاهده می‌شود که از دمای ۱۲°C تا ۲°C چگالی آب ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

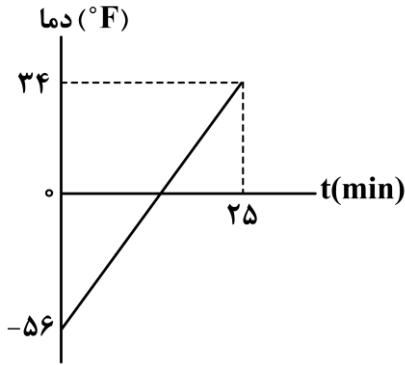
انبساط غیرعادی آب 

آب در دمای ۴ درجه سلسیوس کمترین حجم و بیشترین چگالی را دارد.

مولکول‌های آب در یخ، شبکه‌ای بلوری تشکیل می‌دهند به طوری که در بعضی نواحی به هم نزدیک‌اند و در نواحی دیگر بین آن‌ها فضای خالی وجود دارد. وقتی آب از یخ به حالت مایع تبدیل می‌شود، دیگر شبکه بلوری وجود ندارد و آرایش مولکول‌های آن یکنواخت‌تر شده و حجم اشغال شده کاهش می‌یابد. در محدوده دماهای ۰°C تا ۴°C بقایای ساختار مولکولی یخ هنوز در آب وجود دارد و باعث انبساط غیرعادی آب می‌شود. در واقع با افزایش دما از ۰°C تا ۴°C حجم آب کاهش یافته و در نتیجه چگالی افزایش می‌یابد.



۳۷- گرمکنی به مایعی به جرم 300g با توان ثابت 3W ، گرما می‌دهد. اگر نمودار تغییرات دمای این مایع برحسب زمان، مطابق شکل زیر باشد، گرمای ویژه این مایع چند واحد SI است؟



- (۱) ۳۰
(۲) ۵۰
(۳) ۳۰۰
(۴) ۵۰۰

(متوسط - محاسباتی - استاندارد - صفحه ۹۸ - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

گام اول

گرمای داده‌شده به مایع برابر است با:

$$P = \frac{Q}{t} \Rightarrow 3 = \frac{Q}{25 \times 60} \Rightarrow Q = 4500\text{J}$$

گام دوم

تغییرات دما برحسب درجه سلسیوس برابر است با:

$$\Delta F = 34 - (-56) = 90^\circ\text{F} \Rightarrow \Delta F = 1/18 \Delta \theta \Rightarrow \Delta \theta = \frac{90}{1/18} = 50^\circ\text{C}$$

گام آخر

با توجه به رابطه گرما داریم:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow 4500 = 0/3 \times c \times 50 \Rightarrow c = \frac{4500}{15} = 300 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$$

گرمای

مقدار انرژی است که به دلیل اختلاف دما از جسم گرم‌تر به جسم سردتر منتقل می‌شود و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Q = mc\Delta T \rightarrow \begin{array}{l} \text{تغییرات دما (} ^\circ\text{C یا K)} \\ \text{گرمای ویژه (} \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \text{)} \\ \text{جرم (kg)} \end{array} \leftarrow \text{گرما (J)}$$

نکته

اگر جسمی گرما بگیرد، $Q > 0$ و اگر جسمی گرما از دست بدهد، $Q < 0$ است.

یکا	توضیحات تکمیلی	
$\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$	مقدار گرمایی که به یک کیلوگرم از یک جسم می‌دهیم تا دمای آن به اندازه یک درجه سانتی‌گراد ($^\circ\text{C}$) یا یک درجه کلین (K) تغییر کند.	گرمای ویژه (c):
$\frac{\text{J}}{\text{K}}$	مقدار گرمایی که به یک جسم می‌دهیم تا دمای آن به اندازه یک درجه سلسیوس ($^\circ\text{C}$) یا کلین (K) تغییر کند.	ظرفیت گرمایی (C):



ظرفیت گرمایی یک جسم از حاصل ضرب جرم جسم در گرمای ویژه جسم به دست می‌آید.

$$C = mc$$

محاسبهٔ گرما با استفاده از ظرفیت گرمایی:

مقدار گرمایی که دمای جسمی به ظرفیت گرمایی C را به اندازهٔ ΔT افزایش می‌دهد. این گرما از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$Q = C\Delta T \rightarrow \begin{array}{l} \text{تغییرات دما (K)} \\ \text{ظرفیت گرمایی } \left(\frac{J}{K}\right) \\ \text{گرما (J)} \end{array}$$

توان و راندمان وسایل گرمکن و سردکن

گاهی اوقات در مسائل گرما بحث از وسایل گرمکن و سردکن مطرح می‌شود. در این مواقع عموماً از توان گرمایی آن وسیله صحبت می‌شود و برای ترکیب آن با گرما می‌توان چنین نوشت:

$$P_{\text{مفید}} = \frac{Q}{t}$$

که در این رابطه Q می‌تواند با هریک از روابط مربوط به گرمای مربوط به تغییر دما یا گرمای مربوط به تغییر حالت ترکیب شود. باید دقت داشت که اگر گرما مربوط به تغییر دما باشد با استفاده از رابطهٔ $Q = mc\Delta\theta$ می‌توان نوشت:

$$P_{\text{مفید}} = \frac{mc\Delta\theta}{t} \Rightarrow \underbrace{\frac{\Delta\theta}{\theta - \theta_0}}_{\text{شیب}} = \left(\frac{P_{\text{مفید}}}{mc}\right) \cdot t \Rightarrow \theta = \left(\frac{P_{\text{مفید}}}{mc}\right)t + \theta_0 \Rightarrow \left|\frac{P_{\text{مفید}}}{mc}\right| = \text{شیب}$$

براساس این رابطه، نمودار دما برحسب زمان برای ماده‌ای که دچار تغییر دما می‌شود باید خطی با عرض از مبدأ θ_0 (دما در لحظهٔ $t = 0$) و اندازهٔ شیبی برابر با $\left(\frac{P_{\text{مفید}}}{mc}\right)$ باشد.



در این روابط بایستی حتماً از توان مفید دستگاه استفاده کرد. اگر در صورت سؤال، توان الکتریکی (ورودی) به دستگاه و بازده (راندمان) آن داده شده باشد باید ابتدا به کمک رابطهٔ بازده، توان مفید دستگاه را به دست آوریم؛ یعنی از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:

$$P_{\text{مفید}} = P_{\text{ورودی}} \times \text{بازده}$$



۳۸- گلوله‌ای به طور افقی با تندی $400 \frac{m}{s}$ به یک قطعه چوب برخورد می‌کند و با تندی $100 \frac{m}{s}$ و به طور افقی از سمت دیگر چوب خارج می‌شود. اگر ۶۰ درصد از کاهش انرژی جنبشی گلوله صرف گرم شدن خود گلوله شود، دمای گلوله چند درجهٔ فارنهایت

تغییر خواهد کرد؟ (گلوله $C = 600 \frac{J}{kg.K}$)

۱۶۷ (۴)

۱۳۵ (۳)

۷۵ (۲)

۸۱ (۱)

(آسان - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۹۸ - ۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

گام اول

۶۰ درصد انرژی جنبشی گلوله صرف گرم کردن گلوله شده است، بنابراین:

$$Q = \frac{60}{100} |\Delta K| \Rightarrow mc\Delta\theta = \frac{60}{100} \times \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow 600 \times \Delta\theta = \left| \frac{60}{100} \times (1 - 16) \times 10^4 \right| \Rightarrow \Delta\theta = \frac{150}{2} = 75^\circ C$$

تغییرات دمای گلوله برحسب درجه فارنهایت برابر است با:

$$\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta \Rightarrow \Delta F = \frac{9}{5} \times 75 = 135^\circ F$$

سوتی‌های پرتکرار

اگر حواستان به یکای خواسته شده نباشد، در دام گزینۀ (۲) می‌افتید!



۳۹- دو میله هم جنس استوانه‌ای شکل و توپر A و B با دمای اولیه یکسان در اختیار داریم. جرم میله A، $\frac{3}{4}$ جرم میله B و ارتفاع میله

B، $\frac{3}{4}$ ارتفاع میله A است. اگر به این میله‌ها گرمای یکسان بدهیم، تغییرات سطح مقطع میله A چند برابر سطح مقطع میله B است؟

$\frac{4}{3}$ (۴)	$\frac{3}{4}$ (۳)	$\frac{16}{9}$ (۲)	$\frac{9}{16}$ (۱)
-------------------	-------------------	--------------------	--------------------

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر - صفحه ۹۸ - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینۀ ۳

کام اول

با توجه به جنس مشابه، متوجه می‌شویم که چگالی آن‌ها با هم برابر است، بنابراین با توجه به رابطه چگالی داریم:

$$\frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{V_B}{V_A} \Rightarrow 1 = \frac{3}{4} \times \frac{V_B}{V_A} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{4}{3}$$

کام دوم

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{A_B}{A_A} \times \frac{h_B}{h_A} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{A_B}{A_A} \times \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{A_B}{A_A} = \frac{16}{9}$$

با توجه به رابطه حجم استوانه داریم:

کام سوم

گرمای یکسان به دو میله داده شده است، بنابراین:

$$\frac{Q_B}{Q_A} = \frac{m_B}{m_A} \times \frac{c_B}{c_A} \times \frac{\Delta \theta_B}{\Delta \theta_A} \xrightarrow[\substack{c_A = c_B \\ Q_A = Q_B}]{1} 1 = \frac{4}{3} \times 1 \times \frac{\Delta \theta_B}{\Delta \theta_A} \Rightarrow \frac{\Delta \theta_B}{\Delta \theta_A} = \frac{3}{4}$$

کام آخر

با توجه به رابطه انبساط سطحی داریم:

$$\Delta A = \alpha A_1 \Delta \theta \Rightarrow \frac{\Delta A_A}{\Delta A_B} = \frac{A_{1A}}{A_{1B}} \times \frac{\alpha_A}{\alpha_B} \times \frac{\Delta \theta_A}{\Delta \theta_B} \xrightarrow[\alpha_A = \alpha_B]{1} \frac{\Delta A_A}{\Delta A_B} = \frac{9}{16} \times 1 \times \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\Delta A_A}{\Delta A_B} = \frac{3}{4}$$

مقایسه گرمای دریافتی دو جسم با هم

۱- هنگامی که دمای دو جسم با مبادله گرما تغییر می‌کند، برای مقایسه آن‌ها می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \frac{c_2}{c_1} \times \frac{\Delta\theta_2}{\Delta\theta_1}$$

۲- در صورتی که به جای جرم جسم‌ها، چگالی و حجم آن‌ها داده شده باشد، برای مقایسه آن‌ها از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} Q = mc\Delta\theta \\ m = \rho V \end{cases} \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{V_2}{V_1} \times \frac{c_2}{c_1} \times \frac{\Delta\theta_2}{\Delta\theta_1}$$



۴۰- V_1 لیتر آب با دمای 50°C را با V_2 لیتر آب با دمای 20°C مخلوط کنیم تا 120°L آب 40°C داشته باشیم، V_1 و V_2 به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه به درستی آمده‌اند؟ (از اتلاف گرما، تبخیر سطحی آب و تغییرات چگالی صرف نظر کنید).

(۱) ۴۰ و ۸۰ (۲) ۷۰ و ۵۰ (۳) ۸۰ و ۴۰ (۴) ۵۰ و ۷۰

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۱۰۰ - ۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

حجم نهایی آب برابر با مجموع حجم آب‌های اولیه است، بنابراین:

$$V_1 + V_2 = 120^\circ\text{L} \quad (1)$$

با توجه به این که اتلاف گرما نداریم، می‌توان نوشت:

$$Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow m_1 c (\theta_e - \theta_1) + m_2 c (\theta_e - \theta_2) = 0 \Rightarrow m_1 (40 - 50) + m_2 (40 - 20) = 0$$

$$\Rightarrow 10 m_1 = 20 m_2 \Rightarrow m_1 = 2 m_2 \xrightarrow{m = \rho V} \rho V_1 = 2 \rho V_2 \Rightarrow V_1 = 2 V_2 \quad (2)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\xrightarrow{(1), (2)} \begin{cases} V_1 = 80^\circ\text{L} \\ V_2 = 40^\circ\text{L} \end{cases}$$

تبادل گرمایی

اگر دو یا چند جسم با دماهای مختلف در تماس با یکدیگر قرار گیرند، پس از مدتی هم‌دما می‌شوند؛ یعنی دمای آن‌ها به مقدار یکسانی می‌رسد. به این دما، دمای تعادل می‌گویند.



۱- قبل از تعادل گرمایی، گرما از جسم گرم‌تر به جسم سردتر منتقل می‌شود.

۲- بعد از تعادل گرمایی، گرمای خالصی بین دو جسم مبادله نمی‌شود.

بنابر قانون پایستگی انرژی، همان‌قدر که اجسام گرم انرژی از دست می‌دهند، اجسام سرد انرژی می‌گیرند، پس جمع جبری این Q ها صفر می‌شود. با فرض نداشتن اتلاف انرژی می‌توان نوشت:

$$Q_1 + Q_2 + \dots = 0$$

روش کلی:

$$|Q_{\text{گرفته شده}}| = |Q_{\text{داده شده}}|$$

۱- اجسامی که دمای آن‌ها بالاتر است، گرما از دست می‌دهند، پس علامت گرما برای آن‌ها منفی است ($Q < 0$).

۲- اجسامی که دمای آن‌ها پایین‌تر است، گرما می‌گیرند، پس علامت گرما برای آن‌ها مثبت است ($Q > 0$).

در تعادل گرمایی، گرچه اجسام به دمای یکسان می‌رسند ولی فاز (حالت) آن‌ها ممکن است یکسان نباشد.

هرچه اختلاف دمای بین دو جسم، بیشتر باشد، گرما با آهنگ بیشتری بین آن‌ها منتقل می‌شود.

تبادل گرمایی بدون تغییر فاز

در این حالت خبری از ذوب شدن، تبخیر شدن و سایر تغییر حالت‌های ماده نیست؛ بنابراین فقط گرمایی به فرم $Q = mc\Delta\theta$ در این سوالات وجود دارند و در نتیجه حل کردن آن‌ها چندان دشوار نیست.

روش حل مسئله

فرض کنید که دو جسم داغ و سرد در نزدیکی هم قرار دارند تا به تعادل برسند. اگر گرمای مبادله شده هریک از آن‌ها به ترتیب Q_1 و Q_2 باشد، مطابق اصل پایستگی انرژی، مجموع این گرماها باید صفر باشد:

$$Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow m_1 c_1 (\theta - \theta_1) + m_2 c_2 (\theta - \theta_2) = 0$$

اگر تعداد جسم‌ها بیشتر شد، کافی است رابطه بالا را تعمیم دهیم:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots = 0 \Rightarrow m_1 c_1 (\theta - \theta_1) + m_2 c_2 (\theta - \theta_2) + m_3 c_3 (\theta - \theta_3) + \dots = 0$$

در رابطه بالا، رعایت SI لازم نیست و تنها کافی است که تمام گرماهای مبادله شده، جرم‌ها، گرماهای ویژه و دماها واحدهای یکسان داشته باشند.

نکات

۱- اگر چند جسم به جرم‌های $m_1, m_2, m_3, \dots$ و دمای اولیه $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ و گرمای ویژه $c_1, c_2, c_3, \dots$ و ... باهم مخلوط شوند در صورتی که تغییر حالت (ذوب، انجماد، میعان و ...) رخ ندهد و از اتلاف گرما صرف نظر شود، دمای تعادل از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\theta = \frac{m_1 c_1 \theta_1 + m_2 c_2 \theta_2 + m_3 c_3 \theta_3 + \dots}{m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_3 c_3 + \dots}$$

✓ اگر در حالت فوق، همه اجسام از یک نوع ماده باشند، در این صورت $c_1 = c_2 = c_3 = \dots$ و در نتیجه دمای تعادل از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$\theta = \frac{m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2 + m_3 \theta_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}$$

۲- اگر چگالی و حجم مواد، داده شده باشد، با توجه به رابطه $m = \rho V$ ، دمای تعادل برابر است با:

$$\theta = \frac{\rho_1 V_1 c_1 \theta_1 + \rho_2 V_2 c_2 \theta_2 + \dots}{\rho_1 V_1 c_1 + \rho_2 V_2 c_2 + \dots}$$

✓ در صورتی که دو ماده هم جنس باشند، ρ و c آن‌ها برابر است؛ بنابراین دمای تعادل از روابط زیر سریع و راحت محاسبه می‌شود:

$$\theta = \frac{V_1 \theta_1 + V_2 \theta_2}{V_1 + V_2} \quad \text{یا} \quad \theta = \frac{m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2}{m_1 + m_2}$$

۳- اگر دو مایع از یک جنس به جرم‌های m_1 و $m_2 = k m_1$ و یا حجم‌های V_1 و $V_2 = k V_1$ با دماهای θ_1 و θ_2 را باهم مخلوط کنیم و تغییرات حجم ناچیز باشد، دمای تعادل از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\theta = \frac{\theta_1 + k \theta_2}{1 + k}$$



۴۱- m_1 کیلوگرم آب با دمای 10°C را با m_2 کیلوگرم آب با دمای 50°C مخلوط می‌کنیم و تا رسیدن به دمای تعادل، $33/6 \text{ kJ}$ گرما

تلف می‌شود. اگر پس از رسیدن به تعادل 4 kg آب با دمای 18°C داشته باشیم، نسبت $\frac{m_2}{m_1}$ در کدام گزینه به درستی آمده است؟

$$(c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}})$$

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$\frac{3}{5} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_{\text{اتلاف}} = 0 \Rightarrow m_1 c \Delta \theta_1 + m_2 c \Delta \theta_2 + Q_{\text{اتلاف}} = 0$$

$$\Rightarrow m_1 \times 4200 \times 8 + m_2 \times 4200 \times (-32) + 33600 = 0 \xrightarrow{\div 4200} 8m_1 - 32m_2 + 8 = 0 \xrightarrow{\div 8} 4m_2 - m_1 = 1$$

از طرفی $m_1 + m_2 = 4 \text{ kg}$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} 4m_2 - m_1 = 1 \\ m_1 + m_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 5m_2 = 5 \Rightarrow m_2 = 1 \text{ kg}, m_1 = 3 \text{ kg}$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{3}$$



۴۲- ۷۵ درصد گرمایی که 500 g آب 40°C درجه سلسیوس از دست می دهد تا به آب صفر درجه سلسیوس تبدیل شود، چند

کیلوگرم یخ صفر درجه سلسیوس را می تواند ذوب کند؟ ($c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$, $L_F = 336000 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$)

- (۱) $1875/0$ (۲) $25/0$ (۳) $875/1$ (۴) $5/2$

گام اول

گرمایی که آب از دست می دهد برابر است با:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow Q = 0/5 \times 4200 \times (-40) = -84000 \text{ J}$$

۷۵ درصد این گرما به قطعه یخ می رسد، بنابراین:

$$Q' = \frac{75}{100} \times Q = \frac{75}{100} \times (-84000) = -63000 \text{ J}$$

گام آخر

جرمی از یخ که به ازای دادن گرمای Q' ذوب می شود، برابر است با:

$$|Q'| = -mL_F \Rightarrow 63000 = m \times 336000 \Rightarrow m = 0/1875 \text{ kg}$$

تغییر حالت جامد به مایع (ذوب)

اگر به جسم جامد گرما دهیم دمای آن افزایش می یابد. وقتی دمای جسم به مقدار مشخصی برسد، افزایش دما متوقف می شود و دما ثابت می ماند. در این حالت جسم شروع به ذوب شدن می کند و به مایع تبدیل می شود. این دمای ثابت را نقطه ذوب می نامند که به **جنس جسم و فشار وارد بر آن بستگی دارد.**

عمل ذوب، فرایندی گرماگیر است، یعنی به جسم جامدی که به دمای ذوب خود رسیده باشد باید گرما بدهیم تا به مایع تبدیل شود این گرما دمای جسم را تغییر نمی دهد بلکه سبب تغییر حالت آن می شود و داریم:

$$Q = mL_F$$

Q : گرمای لازم برای ذوب برحسب ژول (J)

m : جرم ذوب شده برحسب کیلوگرم (kg)

L_F : گرمای نهان ذوب برحسب ژول بر کیلوگرم ($\frac{\text{J}}{\text{kg}}$)

تذکره!

گرمای نهان ذوب بستگی به جنس جسم دارد.



- ۱- نقطه ذوب دمایی است که در آن جسم جامد شروع به ذوب شدن می‌کند.
- ۲- برخلاف جامدهای خالص و بلورین، جامدهای بی‌شکل مانند شیشه و جامدهای بی‌شکل و آمورف مانند قیر نقطه ذوب مشخصی نداشته و پیش از ذوب، خمیری شکل می‌شوند. این مواد در گستره‌ای از دما به تدریج ذوب می‌شوند.
- ۳- نقطه ذوب به جنس جسم و فشار وارد بر آن بستگی دارد.
- ۴- معمولاً افزایش فشار وارد بر جسم باعث بالا رفتن نقطه ذوب می‌گردد. به جز یخ که افزایش فشار باعث کاهش نقطه ذوب می‌شود.
- ۵- به استثنای چند مورد خاص، حجم جامدهای بلورین هنگام ذوب شدن افزایش می‌یابد، زیرا حجمی که آرایش منظم مولکول‌ها در حالت جامد اشغال کرده‌اند، نسبت به حالت مایع که آرایش مولکولی نامنظمی دارد، کمتر است.
- ۶- نقطه انجماد و ذوب یک جسم، یکسان است.
- ۷- یخ و برف در حالت جامد، آب می‌باشند ولی ظاهر متفاوتی با هم دارند.
- ۸- ناخالصی می‌تواند باعث کاهش نقطه انجماد شود.



۴۳- در فشار ۱atm درون ظرف عایقی، ۱/۵kg آب و ۵/۵kg یخ در حال تعادل هستند. اگر به مجموعه آب و یخ ۲۶۸/۸kJ گرما

بدهیم، دمای نهایی چند درجه سلسیوس می‌شود؟ (از اتلاف گرما صرف نظر کنید و $c_{\text{آب}} = 4/2 \frac{\text{J}}{\text{g.K}}$ و $L_F = 336 \frac{\text{J}}{\text{g}}$)

۱۶ (۴)

۱۲ (۳)

۸ (۲)

صفر (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۱۰۵ - ۱۰۴

پاسخ: گزینه ۳

گام اول

ابتدا گرمای لازم برای ذوب یخ را به دست می‌آوریم:

$$Q_1 = mL_F = 0/5 \times 336000 = 168000 \text{ J} = 168 \text{ kJ}$$

گام آخر

گرمای داده شده از ۱۶۸kJ بزرگ‌تر است، بنابراین دمای نهایی بالاتر از صفر درجه سلسیوس است، در نتیجه داریم:

$$268/8 - 168 = 100/8 \text{ kJ}$$

حالا قرار است ببینیم با ۱۰۰/۸kJ دمای ۲kg آب صفر درجه سلسیوس به چند درجه سلسیوس خواهد رسید:

$$Q_2 = mc\Delta\theta \Rightarrow 100800 = 2 \times 4200 \times (\theta - 0) \Rightarrow \theta = \frac{100800}{8400} = 12^\circ\text{C}$$



۴۴- ۴g بخار آب ۱۰۰°C در فشار یک اتمسفر، حداکثر چند گرم یخ صفر درجه سلسیوس را می‌تواند ذوب کند؟

(از اتلاف گرما صرف نظر کنید و $L_V = 2268 \frac{\text{J}}{\text{g}}$ ، $L_F = 336 \frac{\text{J}}{\text{g}}$ ، $c_{\text{آب}} = 4/2 \frac{\text{J}}{\text{g.K}}$)

۳۲ (۴)

۲۸ (۳)

۲۷ (۲)

۱۸/۵ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۱۰۸ - ۱۰۴

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به این که اتلاف گرما نداریم، می‌توان نوشت:

$$mL_V + mc\Delta\theta = m'L_F \Rightarrow 4 \times 2268 + 4 \times 4/2 \times 100 = m' \times 336$$

$$\Rightarrow 9072 + 1680 = 336m' \Rightarrow 336m' = 10752 \Rightarrow m' = \frac{10752}{336} \Rightarrow m' = 32 \text{ g}$$



۴۵- در فشار یک اتمسفر، چند گرم آب 40°C را روی 600g یخ صفر درجه سلسیوس بریزیم تا پس از برقراری تعادل گرمایی، 678g آب صفر درجه سلسیوس داشته باشیم؟

(اتلاف گرمایی ناچیز است و $L_F = 336000 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$ ، $c_{\text{یخ}} = 2100 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$ ، $c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$)

(۱) ۱۱۳ (۲) ۲۲۶ (۳) ۴۵۲ (۴) ۵۶۵

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۱۰۵ - ۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

کلم اول

از این که در نهایت آب صفر درجه سلسیوس داریم، متوجه می‌شویم که دمای تعادل، صفر درجه سلسیوس است. بخشی از یخ (m') ذوب شده است و تبدیل به آب صفر درجه سلسیوس شده است و همه آب (m) از 40°C به صفر درجه سلسیوس رسیده است، بنابراین با توجه به اتلاف گرمایی ناچیز می‌توان نوشت:

$$Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow m' L_F + mc\Delta\theta = 0$$

$$\Rightarrow m' \times 336000 + m \times 4200 \times (0 - 40) = 0 \xrightarrow{\div 168000} 2m' - m = 0 \Rightarrow m = 2m' \quad (1)$$

جرم آب نهایی برابر با 678g است، بنابراین:

$$\Rightarrow m' + m = 678 \quad (2)$$

کلم دوم

با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$m' + 2m' = 678 \Rightarrow m' = \frac{678}{3} = 226\text{g}$$

کلم آخر

جرم یخ ذوب شده 226g است و جرم آب اولیه، ۲ برابر جرم یخ ذوب شده است، بنابراین:

$$m = 2 \times 226 = 452\text{g}$$

سوئی‌های پرتکرار

اگر حواستان نباشد و به اشتباه جرم یخ ذوب شده را به عنوان پاسخ نهایی در نظر بگیرید، در دام گزینه (۲) می‌افتید!

بررسی سؤالات تعادل گرمایی در حالتی که تغییر حالت فیزیکی وجود دارد و دما و حالت نهایی را می‌دانیم

در این حالت چون دمای نهایی را می‌دانیم، از ابتدا می‌دانیم که چه موادی تغییر حالت می‌دهند و چه موادی تغییر حالت نمی‌دهند؛ بنابراین می‌توانیم باز هم مثل قسمت قبل، از پایستگی انرژی استفاده کنیم. فقط باید دقت کنیم که گرما علاوه بر فرم $Q = mc\Delta\theta$ ، به فرم $Q = mL_F$ و $Q = mL_V$ هم می‌تواند وجود داشته باشد.

تذکر

استفاده از رابطه $\theta = \frac{m_1 c_1 \theta_1 + m_2 c_2 \theta_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$ فقط مربوط به وقتی است که تغییر حالت نداریم. در این بخش از این رابطه استفاده نکنید!

هنگامی که مقداری آب و یخ در کنار یکدیگر قرار گیرند، آب که دمای بالاتری دارد، گرما از دست می‌دهد و یخ که دمای پایین‌تری دارد، این گرما را می‌گیرد، در اینجا دو حالت وجود خواهد داشت:

حالت اول: اگر آب و یخ با محیط، گرمایی مبادله نکنند؛ آن‌گاه:

$$Q_{\text{آب}} + Q_{\text{یخ}} = 0$$

حالت دوم: اگر آب و یخ گرمای Q' را با محیط مبادله کنند، آن‌گاه:

$$Q_{\text{آب}} + Q_{\text{یخ}} = Q'$$

نکات طلایی

- ۱- اگر به‌غیر از آب و یخ، جسم دیگری مانند فلز نیز در تبادل گرما شرکت داشته باشد، گرمایی که آن جسم نیز مبادله می‌کند باید با Q های دیگر جمع شود.
- ۲- اگر مقدار یکی از اجسام بسیار زیاد باشد، مانند قطعه یخ بزرگ یا استخر آب، دمای تعادل برابر با دمای آن جسم با مقدار زیاد خواهد بود. به‌عنوان مثال اگر فلزی با دمای 50°C ، روی قطعه یخ بزرگی با دمای صفر درجه سلسیوس قرار گیرد، مقداری از یخ صفر درجه سلسیوس، ذوب شده و به آب صفر درجه سلسیوس تبدیل می‌شود ولی دمای تعادل در نهایت برابر با دمای یخ، یعنی صفر درجه سلسیوس خواهد شد و محصول نهایی، یخ، آب و فلز صفر درجه سلسیوس خواهد بود.
- ۳- تنها در دمای صفر درجه سلسیوس، آب و یخ می‌توانند در کنار یکدیگر در تعادل گرمایی باشند، پس اگر در سؤالی گفته شود که در نهایت مقداری از یخ ذوب شده است، یعنی محصول نهایی آب و یخ است و این یعنی دمای تعادل 0°C است.

راهنمای زنگ‌بازی

- ۱- در سؤالات تعادل گرمایی و سؤالات نسبتی، همان ابتدای مسئله اعداد داده‌شده برای c و L_F و L_V را بررسی کنید و اگر همه آن‌ها به یک عدد خاص بخش‌پذیر بودند، ابتدا آن‌ها را ساده کنید و سپس اقدام به حل سؤالات کنید.
- مثلاً در سؤالات آب و یخ اگر اعداد داده‌شده به‌صورت زیر بود، ابتدا همه آن‌ها را به ۴۲۰۰ تقسیم کنید و محاسبات را در سیستم کالری انجام دهید.

$$c_{\text{یخ}} = 2100 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}} \Rightarrow c_{\text{یخ}} = \frac{1}{2} \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot ^{\circ}\text{C}}$$

$$c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}} \Rightarrow c_{\text{آب}} = 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot ^{\circ}\text{C}}$$

$$L_F = 336000 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \Rightarrow L_F = 80 \frac{\text{cal}}{\text{g}}$$

- ۲- در مسائل تعادل گرمایی نیاز نیست کمیت‌ها الزاماً در SI باشند، بلکه هم‌یکا باشند، کافی است!
- ۳- در مسائل تعادل گرمایی پس از نوشتن رابطه مربوطه می‌توانیم عوامل مشترک در تمام جمله‌ها را خط بزنیم!
- ۴- هرگاه در یک سؤال، پس از برقراری تعادل، آب و یخ در کنار هم داشته باشیم، دمای تعادل الزاماً صفر درجه سلسیوس و هرگاه پس از برقراری تعادل، آب و بخار آب در کنار هم داشته باشیم، دمای تعادل الزاماً 100°C است.



۴۶- کدام گزینه باعث کاهش آهنگ تبخیر سطحی یک مایع می‌شود؟

- (۱) کاهش فشار هوا در سطح مایع
- (۲) افزایش دمای مایع
- (۳) افزایش تندی جریان هوا در سطح مایع
- (۴) کاهش مساحت سطح مایع

(آسان - مفهومی - سریع  - صفحه ۱۰۷ - ۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۴ 

آهنگ تبخیر سطحی مایع به عواملی از جمله فشار هوای بالاس سطح مایع، دما و مساحت سطح مایع بستگی دارد. افزایش دمای مایع، کاهش فشار هوای در سطح مایع و افزایش تندی جریان هوا در سطح مایع باعث افزایش آهنگ تبخیر سطحی یک مایع می‌شود.

تذکر 

طبق اصل برنولی با افزایش تندی شاره، فشار آن کاهش می‌یابد.

تبخیر سطحی

می‌دانیم مولکول‌ها در مایع همواره در حرکت هستند برخی از مولکول‌های مایع، هنگامی که به سطح مایع می‌رسند ممکن است به اندازه‌ای انرژی جنبشی داشته باشند که بتوانند خود را از سطح مایع جدا کرده و در فضای محیط پخش شوند این نوع تبخیر که از سطح مایع صورت می‌گیرد تبخیر سطحی نامیده می‌شود.

۱- در پدیده تبخیر سطحی، تندی برخی از مولکول‌های مایع به حدی می‌رسد که می‌توانند از سطح مایع فرار کنند.

۲- تبخیر سطحی در هر دمایی اتفاق می‌افتد.

۳- با افزایش دما، افزایش سطح آزاد مایع، افزایش جریان هوا، کاهش رطوبت هوا و کاهش فشار هوا، آهنگ تبخیر سطحی افزایش می‌یابد.

۴- آهنگ تبخیر سطحی به جنس مایع بستگی دارد.



۴۷- در چاله کوچکی m گرم آب صفر درجه سلسیوس قرار دارد. بر اثر تبخیر سطحی، قسمتی از آب تبخیر شده و بقیه آن یخ می‌زند.

اگر جرم یخ ایجاد شده m' باشد، نسبت $\frac{m'}{m}$ در کدام گزینه به درستی آمده است؟ (L_V گرمای نهان تبخیر آب و L_F گرمای نهان ذوب یخ در دمای صفر درجه سلسیوس است.)

$$(1) \frac{L_F}{L_V + L_F} \quad (2) \frac{L_F}{L_V - L_F} \quad (3) \frac{L_V}{L_V + L_F} \quad (4) \frac{L_V}{L_V - L_F}$$

(متوسط - محاسباتی - سریع - صفحه ۱۰۸ - ۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

گرمایی که m' گرم آب از دست می‌دهد تا به یخ تبدیل شود، برابر با گرمایی است که $m - m'$ گرم آب می‌گیرد تا تبخیر شود، بنابراین می‌توان نوشت:

$$m' L_F = (m - m') L_V \Rightarrow m' L_F = m L_V - m' L_V \Rightarrow m' (L_F + L_V) = m L_V \Rightarrow \frac{m'}{m} = \frac{L_V}{L_V + L_F}$$

تبخیر سطحی آب صفر درجه سلسیوس

فرض کنید که مقداری آب درون چاله‌ای در نقطه انجماد آب قرار دارد و بر اثر تبخیر سطحی مقداری از آن، باقی‌مانده آب یخ می‌بندد. برای مقایسه جرم یخ و جرم آب تبخیر شده می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$|Q_{\text{انجماد}}| = Q_{\text{تبخیر}} \Rightarrow m_{\text{یخ}} L_F = m_{\text{بخار}} L_V \Rightarrow \frac{m_{\text{یخ}}}{m_{\text{بخار}}} = \frac{L_V}{L_F}$$

$$m_{\text{بخار}} - m_{\text{یخ}} - m = m_{\text{آب اولیه}} = m_{\text{آب باقی‌مانده}}$$



۴۸- در فشار یک اتمسفر درون ظرف عایقی 50g یخ صفر درجه سلسیوس و 200g آب در تعادل هستند. قطعه فلزی با دمای اولیه 80°C را درون این ظرف می‌اندازیم. تا رسیدن به دمای تعادل، قطعه فلز 42kJ گرما از دست می‌دهد. ظرفیت گرمایی فلز چند

واحد SI است؟ (فرض کنید گرما فقط بین فلز و مخلوط آب و یخ مبادله می‌شود و $c_{\text{آب}} = 4/2 \frac{\text{J}}{\text{g.K}}$ و $L_F = 336 \frac{\text{J}}{\text{g}}$)

$$(1) 750 \quad (2) 840 \quad (3) 1050 \quad (4) 1400$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد - صفحه ۱۰۵ - ۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

گام اول

42kJ از گرمای لازم برای ذوب یخ بیشتر است، پس دمای تعادل بالاتر از صفر درجه سلسیوس می‌شود، بنابراین می‌توان نوشت:

$$Q_{\text{یخ}} + Q_{\text{آب}} + Q_{\text{فلز}} = 0 \Rightarrow 0/05 \times 336000 + 0/25 \times 4200 \times (\theta - 0) + (-42000) = 0 \Rightarrow \theta = 24^\circ\text{C}$$

حالا می‌توانیم ظرفیت گرمایی فلز را به‌دست آوریم:

$$Q_{\text{فلز}} = C\Delta\theta \Rightarrow -42000 = C \times (24 - 80) \Rightarrow C = 750 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

•• ایو ••

۴۹- مطابق شکل زیر، درون یک استوانه که روی آن پیستون بدون اصطکاکی است، مقداری گاز آرمانی وجود دارد. در ابتدا دمای گاز 7°C و عددی که فشارسنج نشان می‌دهد 14atm است. اگر دمای گاز را به 77°C برسانیم، پیستون بالا می‌رود و ارتفاع ستون گاز 25cm می‌شود. در این حالت فشارسنج چند اتمسفر را نشان می‌دهد؟ ($P_0 = 1\text{atm}$)



- (۱) ۸
(۲) ۹
(۳) $7/4$
(۴) $8/4$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۱۲۲ - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

فشارسنج، فشار پیمانه‌ای را نشان می‌دهد، بنابراین در ابتدا فشار گاز $P_1 = 14 + 1 = 15\text{atm}$ است.

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{15 \times 12A}{273 + 7} = \frac{P_2 \times 25A}{273 + 77} \Rightarrow P_2 = 9\text{atm}$$

بنابراین عددی که فشارسنج نشان می‌دهد (فشار پیمانه‌ای) 8atm است.

سوتی‌های پرتکرار

اگر حواستان به خواسته سوال که فشار پیمانه‌ای است، نباشد در دام گزینه (۲) می‌افتید!

•• ایو ••

۵۰- کدام عبارت‌ها درست هستند؟

- الف- رسانش گرمایی فقط از طریق الکترون‌های آزاد انجام می‌شود. به همین دلیل فلزات رسانایی گرمایی بسیار خوبی دارند.
ب- هرچه ضریب انبساط حجمی مایعی بزرگ‌تر باشد، همرفت طبیعی در آن بهتر رخ می‌دهد.
ج- دمانگاشت ابزاری است که با آن می‌توان تابش فروسرخ را آشکارسازی کرد.
د- از تابش گرمایی می‌توان به‌عنوان مبنایی برای اندازه‌گیری دمای اجسام استفاده کرد.
- (۱) «الف» و «د» (۲) «ب» و «د» (۳) فقط «ب» و «ج» (۴) «الف»، «ب» و «ج»

(آسان - خط به خط - سریع) (صفحه ۱۱۶ - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

عبارت‌های «ب» و «د» درست هستند.

بررسی موارد نادرست:

(الف)

علاوه بر الکترون‌های آزاد، ارتعاش‌های اتمی نیز عامل انتقال گرما از طریق رسانش هستند. هرچند نقش الکترون‌های آزاد در انتقال گرما در رساناهای فلزی بیشتر است.

(ج)

ابزاری که با آن تابش فروسرخ را آشکارسازی می‌کنند، دمانگار نام دارد و تصویر به‌دست‌آمده از آن، دمانگاشت نام دارد.

در این بخش، روش‌های انتقال گرما را با کمک طرح‌واره زیر مرور می‌کنیم:





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید
پاسخنامه ویدئویی آزمون

شیمی دهم: ردپای گازها در زندگی + آب، آهنگ زندگی
(تا ابتدای محلول و مقدار حل‌شونده‌ها) / صفحه‌های ۶۲ تا ۹۲

بودجه‌بندی
این آزمون

مباحث این آزمون در مجموع ۲ تست از ۳۰ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور

۵۱- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) برای پر کردن تایر خودروها از مخلوط گازی استفاده می‌شود که گاز اکسیژن در آن حذف شده است.
- (۲) واکنش اکسایش گلوکز، واکنش این ماده با گاز اکسیژن است که با تولید انرژی همراه است.
- (۳) چربی موجود در کوهان شتر همانند سوخت‌های سبز، در ساختار خود اتم اکسیژن دارد.
- (۴) مواد عنصری با توجه به ساختار خود می‌توانند خواص و رفتار متفاوتی نشان دهند.

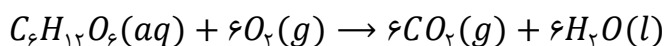
(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۸۳ - ۱۰۰۲

پاسخ: گزینه ۱

یکی از معایب استفاده از هوا برای پر کردن تایر خودروها، مایع شدن بخار آب موجود در هوا پس از وارد شدن هوا به تایر به علت تغییر فشار و دما است. در این حالت مقدار گاز درون تایر و به تبع آن حجم گاز کاهش می‌یابد. برای جلوگیری از این کار از گاز نیتروژن ۹۵ درصد که گاز اکسیژن ناخالصی آن است، استفاده می‌شود. یعنی بخار آب از گاز پرکننده تایر حذف شده است. اگر چه مقدار گاز اکسیژن از هوای معمولی در این گاز کمتر است، اما به‌طور کامل حذف نشده است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

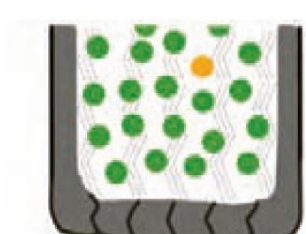
(۲) به واکنش آرام مواد با اکسیژن که با تولید انرژی همراه است، واکنش اکسایش می‌گویند. معادله واکنش اکسایش گلوکز که تأمین‌کننده اصلی انرژی در بدن انسان است، به‌صورت زیر انجام می‌شود:



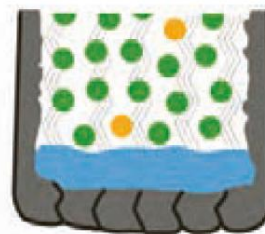
(۳) سوخت سبز، سوختی است که در ساختار خود افزون بر کربن و هیدروژن، اکسیژن نیز دارد و از پسماندهای گیاهی مانند شاخ و برگ گیاه سویا، نیشکر و دانه‌های روغنی به‌دست می‌آید. اتانول و روغن‌های گیاهی نمونه‌هایی از این نوع سوخت‌ها هستند.

چربی کوهان شتر با فرمول شیمیایی $C_{57}H_{110}O_6$ نیز حاوی عناصر هیدروژن، کربن و اکسیژن در ساختار خود است. از اکسایش این چربی که در کوهان شتر ذخیره می‌شود، انرژی و آب جاندار تأمین می‌شود.

(۴) عنصرها دسته‌ای از مواد هستند که تنها از یک نوع اتم تشکیل شده‌اند. برخی عناصر، بیش از یک ساختار به خود می‌گیرند که به هر یک از ساختارها، آلوتروپ یا دگرشکل می‌گویند. مانند اوزون و اکسیژن، گرافیت، الماس، کربن ۶۰ و ...، فسفر قرمز و سفید، گوگرد مولکولی و گوگرد آمورف. هر یک از آلوتروپ‌ها ویژگی‌های خاص خود را دارند. به‌عنوان مثال اوزون و اکسیژن که دو نقطه جوش متفاوت دارند، یا تفاوت الماس و گرافیت که در سال دوازدهم با تفاوت آن‌ها آشنا خواهید شد.



نیتروژن ۹۵%
اکسیژن ۵%



نیتروژن ۷۸%
اکسیژن ۲۱%
آب ۱%

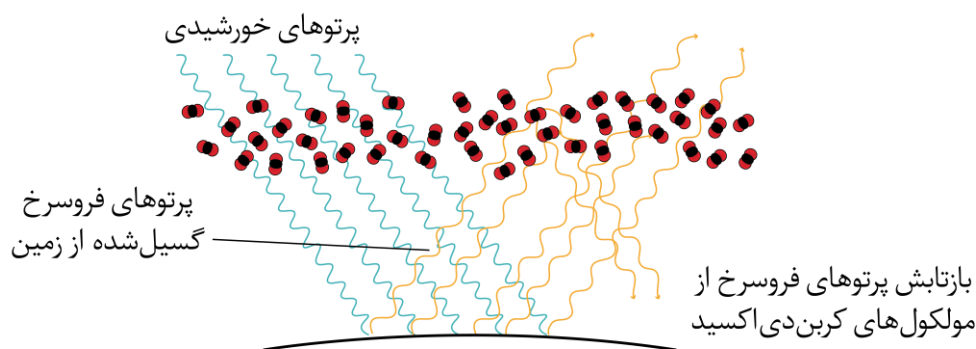
۵۲- کدام یک از موارد زیر درست است؟

- (۱) مقدار تغییر دما در بیرون گلخانه نسبت به داخل آن کمتر است.
- (۲) بخش عمده‌ای از پرتوهای خورشیدی به وسیله هواکره جذب می‌شوند.
- (۳) بازتابش پرتوهای فرو سرخ گسیل شده از زمین توسط مولکول‌هایی با ساختار خطی انجام می‌شود.
- (۴) پرتوهای گسیل شده از زمین نسبت به پرتوهای خورشیدی دارای طول موج کمتر و انرژی بیشتری هستند.

پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۱) - صفحه ۶۹ و ۷۷ - ۱۰۰۲

بازتابش پرتوهای فرو سرخ گسیل شده از زمین توسط مولکول‌های کربن دی‌اکسید انجام می‌گیرد.



مدل فضاپرکن این مولکول به صورت زیر است:



همان طور که مشخص است، ساختار این مولکول خطی است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- (۱) به علت اثر گلخانه‌ای و حفظ گرما در گلخانه، مقدار تغییر دما در بیرون گلخانه نسبت به داخل آن بیشتر است. این ویژگی در گلخانه‌ها، گیاه یا میوه را از آسیب‌های ناشی از تغییر دما حفظ می‌کند.
- (۲) بخش کوچکی از پرتوهای خورشیدی به وسیله هواکره و بخش عمده‌ای از آن توسط زمین جذب می‌شود.



- (۴) بخشی از پرتوهای فرابنفش نور خورشید به سطح زمین می‌رسد و زمین پس از جذب آن، گرم می‌شود و از خود پرتوهای فرو سرخ گسیل می‌دارد؛ با این تفاوت که انرژی پرتوهای گسیل شده، کمتر و طول موج آن‌ها بلندتر است.

۵۲- ۳ مول از گاز کربن مونوکسید در دمای 273°C و فشار ۴ اتمسفر موجود است. چگالی این نمونه گاز بر حسب گرم بر لیتر برابر چقدر است؟ ($C = 12, O = 16: g.mol^{-1}$)

۱/۱۲۵ (۴)

۲/۵ (۳)

۳/۷۵ (۲)

۷/۵ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۷۷ - ۱۰۰۲

پاسخ: گزینه ۳

روش اول

چگالی یک گاز مشخص، در دما و فشار معین مقدار ثابتی است. برای محاسبه آن تنها کافی است جرم مولی و حجم مولی گاز را در دما و فشار مشخص به دست آوریم. در شرایط STP که فشار برابر یک اتمسفر و دما برابر صفر درجه سلسیوس (273 کلوین) است، حجم مولی گازها برابر با $22/4$ لیتر است. حال باید حجم مولی گازها را در شرایط آزمایش (دمای 273°C 546 کلوین) و فشار ۴ اتمسفر محاسبه کنیم.

قانون گازها

از کنار هم قرار گرفتن ۳ قانون بویل، شارل و آووگادرو، یک قانون جامع برای رفتار گازها حاصل شد که شکل ریاضی آن به دو صورت زیر است:

$$PV = nRT \quad \frac{PV}{nT} = \text{مقدار ثابت}$$

بر این اساس با دانستن ۴ پارامتر گاز اول و ۳ پارامتر دیگر گاز دوم، می توان مشخص کرد. به عنوان مثال ما در شرایط STP ، حجم یک مول گاز را می دانیم. ($P_1 = 1 \text{ atm}, T_1 = 273 \text{ K}, n_1 = 1 \text{ mol}, V_1 = 22/4 \text{ L}$) بر این اساس می توانیم هر یک از پارامترهای مجهول گاز دیگر را مشخص کنیم.

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2} \Rightarrow \frac{1 \times 22/4}{1 \times 273} = \frac{4 \times V_2}{546} \Rightarrow V_2 = 11/2 \text{ L}$$

پس حجم مولی گازها در شرایط مطرح شده برابر $11/2$ لیتر است. (راه حل سریع: نسبت به حالت STP ، فشار چهار برابر و دما نیز دو برابر است، پس حجم $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ برابر شده که معادل $11/2$ لیتر است.)

در نهایت چگالی گاز را حساب می کنیم. در رابطه چگالی جرم را جرم مولی و حجم را نیز حجم مولی گازها قرار می دهیم:

$$d = \frac{m}{V} = \frac{28}{11/2} = 2/5 \text{ g.L}^{-1}$$

پس چگالی گاز کربن مونوکسید در شرایط آزمایش برابر با $2/5$ گرم بر لیتر است.

روش دوم

طبق رابطه چگالی ($\frac{\text{جرم}}{\text{حجم}}$ = چگالی)، برای محاسبه چگالی گاز کربن مونوکسید (CO) نیاز به پیدا کردن جرم و حجم آن داریم. جرم ۳ مول کربن مونوکسید برابر است با:

$$m_{CO} = 3 \times 28 = 84 \text{ g}$$

در شرایط STP که فشار برابر یک اتمسفر و دما برابر صفر درجه سلسیوس (273 کلوین) است، حجم یک مول گاز برابر با $22/4$ لیتر است. حال باید حجم ۳ مول گاز کربن مونوکسید را در شرایط جدید (دمای 273°C 546 کلوین) و فشار ۴ اتمسفر به دست آوریم:

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2} \Rightarrow \frac{1 \times 22/4}{1 \times 273} = \frac{4 \times V_2}{3 \times 546} \Rightarrow V_2 = 33/6 \text{ L}$$

در نتیجه، چگالی این گاز برابر است با:

$$d = \frac{m}{V} = \frac{84 \text{ g}}{33/6 \text{ L}} = 2/5 \text{ g.L}^{-1}$$



۵۴- کدام گزینه درست است؟

- (۱) ردپای کربن دی‌اکسید نشان می‌دهد در تولید یک محصول یا بر اثر انجام یک فعالیت چه مقدار از این گاز تولید و وارد هواکره می‌شود.
- (۲) استفاده از انرژی خورشید به‌عنوان منبع تولید برق نسبت به سایر منابع، مقدار کربن دی‌اکسید کمتری در طی سال تولید خواهد کرد.
- (۳) دیرتر آغاز شدن فصل بهار در نیمکره شمالی زمین، یکی از اثرات افزایش مقدار میانگین کربن دی‌اکسید در هواکره است.
- (۴) نمودار روند تغییر میانگین مساحت سطح برف در نیمکره شمالی در طی سال‌های گذشته، روند افزایشی داشته است.

پاسخ: گزینه ۱

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۱ - صفحه ۶۷ - ۱۰۰۲)

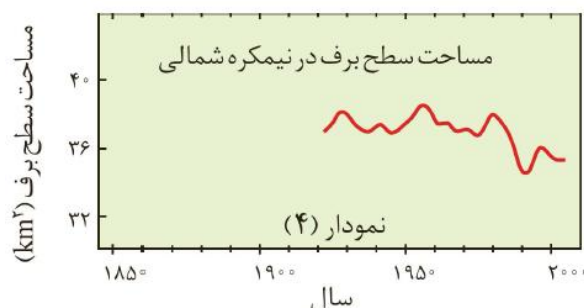
سبک زندگی می‌تواند بیانگر میزان اثرگذاری هر یک از انسان‌ها بر کره زمین و هواکره باشد. ردپا اصطلاحی است که به این اثر نسبت داده‌اند. یکی از این ردپاها، ردپای کربن دی‌اکسید است. ردپای کربن دی‌اکسید نشان می‌دهد در تولید یک محصول یا بر اثر انجام یک فعالیت چه مقدار از این گاز تولید و وارد هواکره می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۲) استفاده از باد به‌عنوان منبع تولید برق نسبت به سایر منابع، مقدار کربن دی‌اکسید کمتری تولید خواهد کرد و ردپای سبک‌تری از آن به‌جای خواهد گذاشت.

(۳) یکی از اثرات افزایش مقدار میانگین کربن دی‌اکسید در هواکره این است که فصل بهار در نیمکره شمالی نسبت به ۵۰ سال گذشته در حدود یک هفته زودتر آغاز می‌شود.

(۴) در طی سال‌های گذشته به علت افزایش قابل توجه مقدار گاز کربن دی‌اکسید در هواکره، میانگین مساحت سطح برف در نیمکره شمالی رو به کاهش بوده و سیر نزولی داشته است. نمودار روند تغییر آن به‌صورت زیر است.



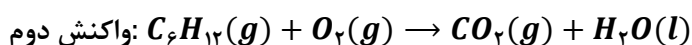
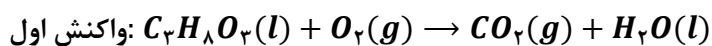
افزایش دمای کره زمین و افزایش سطح آب دریاها

کاهش مساحت برف در نیمکره شمالی

افزایش میزان CO_2 موجود در هواکره



۵۵- پس از موازنه دو واکنش زیر، به‌ترتیب ضریب آب در واکنش و ضریب اکسیژن در واکنش بیشتر است.



(۴) اول - اول

(۳) دوم - دوم

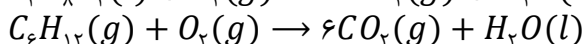
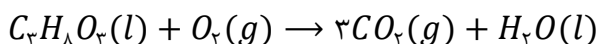
(۲) اول - دوم

(۱) دوم - اول

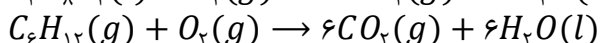
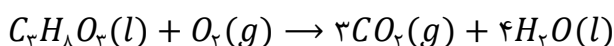
(متوسط - مفهومی - استاندارد ۱ - صفحه ۵۹ - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

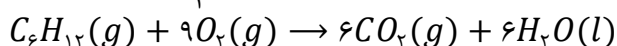
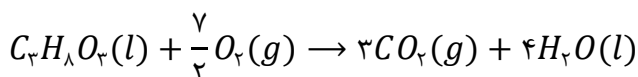
موازنه دو واکنش را از اتم کربن شروع می‌کنیم:



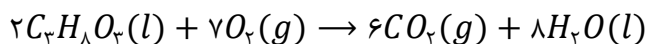
حال موازنه اتم‌های هیدروژن:



در نهایت موازنه اتم‌های اکسیژن:



با توجه به وجود ضریب کسری در معادله اول، ضرایب را در مخرج کسر ضرب می‌کنیم:



پس ضریب آب در معادله اول بزرگ‌تر و ضریب اکسیژن در معادله دوم بیشتر است.



۵۶- کدام مورد درباره واکنشی با معادله موازنه نشده: $P_4(s) + 6Cl_2(g) \xrightarrow{Fe(s)} PCl_3(l)$ نادرست است؟

- (۱) برای انجام این واکنش، از فلز آهن به‌عنوان کاتالیزگر استفاده می‌شود.
- (۲) فراورده این واکنش، یک ماده تجاری است که در تهیه حشره‌کش‌ها کاربرد دارد.
- (۳) ضریب استوکیومتری فراورده دو واحد کمتر از ضریب واکنش‌دهنده گازی است.
- (۴) شمار پیوندهای کووالانسی در ساختار فراورده آن بیشتر از این تعداد در آمونیاک است.

(آسان - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۸۰ - ۱۰۰۲

پاسخ: گزینه ۴

ساختار لوویس مولکول‌های فسفر تری‌کلرید و آمونیاک به‌صورت زیر است:



همان‌طور که مشخص است، شمار پیوندهای اشتراکی در فسفر تری‌کلرید با این شمار در آمونیاک برابر است.

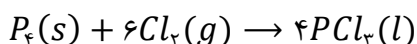
بررسی سایر گزینه‌ها:

وجود نماد $\xrightarrow{Fe(s)}$ در معادله واکنش به معنای آن است که از فلز آهن (Fe) به‌عنوان کاتالیزگر استفاده می‌شود. جدول زیر معنای نمادهای به‌کاررفته بر روی فلش معادله یک واکنش را نشان می‌دهد.

نماد	معنا
$\longrightarrow$	تولید می‌کند یا می‌دهد.
$\xrightarrow{\Delta}$	واکنش‌دهنده‌ها بر اثر گرم شدن واکنش می‌دهند.
$\xrightarrow{20\text{ atm}}$	واکنش در فشار ۲۰ اتمسفر انجام می‌شود.
$\xrightarrow{1200^\circ\text{C}}$	واکنش در دمای ۱۲۰۰ درجه سلسیوس انجام می‌شود.
$\xrightarrow{Pd(s)}$	برای انجام شدن واکنش، از فلز پالادیم (Pd) به‌عنوان کاتالیزگر استفاده می‌شود.

فسفر تری‌کلرید یک ماده تجاری مهم است که در تهیه حشره‌کش‌ها کاربرد فراوانی دارد.

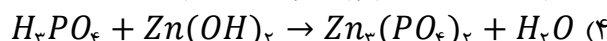
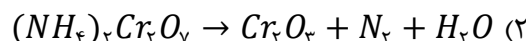
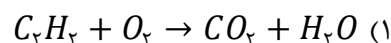
معادله موازنه شده واکنش به‌صورت زیر است:



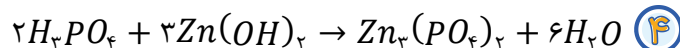
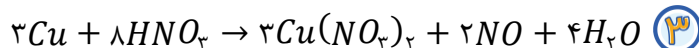
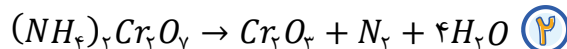
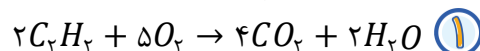
با توجه معادله بالا، ضریب استوکیومتری فراورده (۴) نسبت به ضریب استوکیومتری واکنش‌دهنده گازی یا همان گاز کلر (۶) دو واحد کمتر است.



۵۷- ضریب استوکیومتری آب در کدام یک از واکنش‌های شیمیایی زیر پس از موازنه کردن، بیشتر است؟



معادله موازنه شده هر چهار گزینه به صورت زیر است:



در نتیجه مقدار ضریب استوکیومتری H_2O در واکنش گزینه ۴ نسبت به سایر واکنش‌ها بیشتر است.



۵۸ - کدام گزینه درست است؟

۱) ۲۵ لیتر گاز کربن‌دی‌اکسید در دمای اتاق مثالی از یک نمونه گاز مشخص است.

۲) در دما و فشار یکسان، حجم گازهای گوناگون که جرم یکسانی دارند با هم برابر است.

۳) در دمای ثابت، با افزایش فشار، حجم و فاصله بین مولکول‌های یک گاز کاهش می‌یابد.

۴) شیمی‌دان‌ها دمای اتاق و فشار یک اتمسفر را به عنوان شرایط استاندارد (STP) در نظر گرفته‌اند.

حجم یک نمونه گاز به مقدار، دما و فشار آن وابسته است. در دمای ثابت، گاز بر اثر افزایش فشار متراکم شده و فاصله بین مولکول‌های آن کاهش می‌یابد؛ در نتیجه، حجم آن کاهش می‌یابد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) برای توصیف یک نمونه گاز افزون بر مقدار، باید دما و فشار آن نیز مشخص باشد. در نتیجه، ۲۵ لیتر گاز کربن‌دی‌اکسید در دمای اتاق به علت مشخص نبودن فشار محیط نمی‌تواند بیانگر یک نمونه گاز باشد.

۲) طبق قانون آووگادرو، در دما و فشار یکسان، حجم یک مول از گازهای گوناگون با هم برابر است. این در حالی است که جرم یک مول از گازهای گوناگون با یکدیگر متفاوت است.

۴) شیمی‌دان‌ها دمای صفر درجه سلسیوس و فشار یک اتمسفر را به عنوان شرایط استاندارد (STP) در نظر گرفته‌اند.



۵۹ - اگر در دمای مشخص چگالی نمونه‌ای از گاز اکسیژن ۲ برابر چگالی نمونه‌ای از گاز هلیوم باشد، فشار گاز اکسیژن چند برابر فشار گاز هلیوم است؟ ($He = 4, O = 16: g. mol^{-1}$)

۴) ۰/۵

۳) ۰/۲۵

۲) ۴

۱) ۲

اگر شرایط دو گاز یکسان باشد، نسبت چگالی دو گاز برابر نسبت جرم مولی آن دو است. پس در شرایط یکسان، انتظار داریم چگالی گاز اکسیژن با جرم مولی ۳۲، ۸ برابر چگالی گاز هلیوم با جرم مولی ۴ باشد.

پس اگر شرایط گاز اکسیژن، مشابه شرایط گاز هلیوم باشد (شرایط اول)، چگالی گاز اکسیژن $8x$ خواهد بود که x چگالی گاز هلیوم است. این در حالی است که در شرایط فعلی گاز اکسیژن (شرایط دوم)، چگالی گاز اکسیژن $2x$ است. اگر جرم اکسیژن را در دو حالت یکسان در نظر بگیریم، پس حجم گاز اکسیژن در حالت دوم ۴ برابر حالت اول است.

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\frac{m_1}{V_1}}{\frac{m_2}{V_2}} \xrightarrow{m_1=m_2} \frac{8x}{2x} = \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = 4$$

چون جرم و در نتیجه تعداد ذرات در دو حالت برابر است و همچنین چون دمای دو حالت یکسان است، پس می‌توان گفت، فشار حالت دوم (یا همان فشار اکسیژن) $\frac{1}{4}$ فشار حالت اول (یا همان فشار گاز هلیوم) است.

از رابطه گازها و همچنین تعداد ذرات گازها داریم:

$$PV = nRT \xrightarrow{n=\frac{m}{M}} PV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow d \equiv \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}$$

بر این اساس چگالی یک گاز، به فشار، دما و جرم مولی آن بستگی دارد. پس در دما و فشار مشخص، چگالی تنها به جرم مولی گاز بستگی خواهد داشت و نسبت چگالی دو گاز در دما و فشار یکسان برابر نسبت جرم مولی آن دو گاز خواهد بود:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\frac{P_1 M_1}{RT_1}}{\frac{P_2 M_2}{RT_2}} \xrightarrow{T_1=T_2, P_1=P_2} \frac{d_1}{d_2} = \frac{M_1}{M_2}$$



۶۰- کدام مورد دربارهٔ دگر شکل‌های اکسیژن نادرست است؟

- (۱) دگر شکل واکنش‌پذیرتر در حالت مایع رنگ روشن‌تری دارد.
- (۲) نسبت شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی به شمار جفت الکترون‌های پیوندی در هر دو یکسان است.
- (۳) دگر شکلی که برای گندزدایی میوه‌ها و سبزیجات استفاده می‌شود، دارای نقطهٔ جوش بالاتری است.
- (۴) این دو دگر شکل در منطقهٔ مشخصی از استراتوسفر طی یک واکنش برگشت‌پذیر به یکدیگر تبدیل می‌شوند.

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۱ - صفحه ۷۴ - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

دگر شکل‌های اکسیژن، اکسیژن و اوزون هستند. اوزون از اکسیژن واکنش‌پذیرتر بوده و در حالت مایع رنگ تیره‌تری نسبت به اکسیژن دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ ساختار لوویس مولکول‌های اکسیژن (O_2) و اوزون (O_3) به صورت زیر هستند:



در مولکول اکسیژن، نسبت شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی برابر با $\frac{4}{2} = 2$ است. این نسبت در مولکول اوزون نیز برابر با $\frac{6}{3} = 2$ است.

۳ در صنعت از گاز اوزون برای گندزدایی میوه‌ها و سبزیجات استفاده می‌شود. گاز اوزون نسبت به گاز اکسیژن دارای نقطهٔ جوش بیشتری است.

۴ گاز اوزون و اکسیژن در لایهٔ اوزون (منطقهٔ مشخصی از استراتوسفر) طی واکنش برگشت‌پذیر زیر به یکدیگر تبدیل می‌شوند.

$$2O_3(g) \rightleftharpoons 3O_2(g)$$


۶۱- ماده در حالت مایع همانند حالت گاز و همانند حالت جامد

- (۱) به شکل ظرف در می‌آید - تراکم‌ناپذیر است
- (۲) تراکم‌پذیر است - حجم مشخص دارد
- (۳) حجمی برابر حجم ظرف خود دارد - تراکم‌ناپذیر است
- (۴) در کل ظرف حاوی آن پخش می‌شود - شکل مشخص دارد

(آسان - مفهومی - سریع ۱ - صفحه ۷۶ - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

هر ماده در اطراف ما در یکی از حالت‌های جامد، مایع و گاز قرار دارد. جامد ماده‌ای است که شکل آن و در نتیجه حجم آن ثابت و مشخص است و به شکل ظرف بستگی ندارد. در حالت مایع اگر چه حجم مشخص و ثابت است، اما مایع به شکل ظرف خود در می‌آید. در مقابل اما گاز نه شکل و نه حجم ثابت دارد و اگر در یک ظرف قرار گیرد در تمام ظرف پخش می‌شود و حجم و شکل آن مطابق ظرف در برگیرنده آن خواهد بود. ویژگی حجم معین مایع و جامد و حجم گاز برابر است با حجم ظرف، ناشی از تراکم‌پذیری گاز و تراکم‌ناپذیری ماده در دو حالت جامد و مایع است.



۶۲- در صورت واکنش ۱۵۰ گرم کلسیم کربنات ($CaCO_3$) با مقدار کافی هیدروکلریک اسید مطابق معادله زیر، چند لیتر فراورده گازی در شرایط STP تولید می‌شود؟ ($C = 12, O = 16, Ca = 40: g.mol^{-1}$)

واکنش موازنه شود: $CaCO_3(s) + HCl(aq) \rightarrow CaCl_2(aq) + CO_2(g) + H_2O(l)$

(۴) ۱۱/۲

(۳) ۲۲/۴

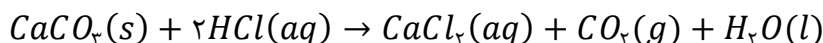
(۲) ۳۳/۶

(۱) ۶۷/۲

(آسان - محاسباتی - سریع - صفحه ۸۰ - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

معادله موازنه شده به صورت زیر است:



توجه

در این واکنش نیاز به موازنه کامل واکنش نیست. در واقع در این واکنش که اتم کربن تنها در کلسیم کربنات در سمت واکنش دهنده‌ها و در کربن دی‌اکسید در سمت فراورده‌ها وجود دارد، تنها کافی است، ضریب این دو ماده را به گونه‌ای انتخاب کنیم که شمار اتم‌های کربن این دو ماده برابر شوند. بر این اساس به ازای مصرف یک مول کلسیم کربنات، یک مول گاز کربن دی‌اکسید تولید می‌شود.

در دمای صفر درجه سلسیوس و فشار یک اتمسفر (شرایط STP) تنها کربن دی‌اکسید به حالت گازی موجود است. حال با توجه به این که در این واکنش ۱۵۰ گرم کلسیم کربنات مصرف شده است، حجم گاز کربن دی‌اکسید تولید شده برابر است با:

$$? L CO_2 = 150 g CaCO_3 \times \frac{1 mol CaCO_3}{100 g CaCO_3} \times \frac{1 mol CO_2}{1 mol CaCO_3} \times \frac{22.4 L CO_2}{1 mol CO_2} = 33.6 L$$

در نتیجه، در این واکنش ۳۳/۶ لیتر فراورده گازی تولید شده است.



۶۳- کدام یک از مطالب زیر نادرست هستند؟

الف - گاز اوزون در لایه تروپوسفر برخلاف استراتوسفر دارای نقش زیان‌بار و مضر است.

ب - در واکنش تولید اوزون تروپوسفری، یکی از فراورده‌های واکنش به رنگ قهوه‌ای روشن است.

ج - اکسیدهای نیتروژن موجود در هوای آلوده شهرهای بزرگ، تنها در هنگام رعد و برق تولید شده‌اند.

د - فراوان‌ترین جزء سازنده هواکره با گاز هیدروژن حتی در حضور کاتالیزگر یا جرقه، واکنش نمی‌دهد.

(۴) «ج» و «د»

(۳) «ب» و «ج»

(۲) «الف» و «د»

(۱) «الف» و «ب»

(آسان - حفظی - استاندارد - صفحه ۸۱ - ۱۰۰۲)

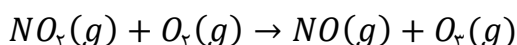
پاسخ: گزینه ۳

عبارت‌های «ب» و «ج» نادرست هستند.

بررسی موارد:

الف) گاز اوزون در لایه تروپوسفر به عنوان آلاینده‌ای سمی و خطرناک به شمار می‌رود که می‌تواند سبب سوزش چشمان و آسیب دیدن ریه‌ها شود؛ به عبارتی در تروپوسفر با نقش زیان‌بار و مضر اوزون مواجه هستیم. این در حالی است که در لایه استراتوسفر، مولکول‌های اوزون مانع ورود بخش عمده‌ای از تابش فرابنفش خورشید به سطح زمین می‌شوند تا موجودات زنده از آثار زیان‌بار این تابش در امان بمانند. به دیگر سخن در استراتوسفر، نقش مفید و محافظتی اوزون آشکار است.

پ) واکنش تولید اوزون تروپوسفری به صورت زیر است:



گاز نیتروژن دی‌اکسید به رنگ قهوه‌ای روشن بوده و جزء واکنش دهنده‌ها است.

ج) گاز نیتروژن در طبیعت تنها هنگام رعد و برق با گاز اکسیژن ترکیب شده و به اکسیدهای نیتروژن تبدیل می‌شود؛ اما در هوای آلوده شهرهای صنعتی و بزرگ، این اکسیدها از واکنش میان گازهای نیتروژن و اکسیژن درون موتور خودرو در دمای بالا نیز پدید می‌آیند.

گاز نیتروژن فراوان ترین جزء سازنده هواکره است. در مخلوطی از گازهای نیتروژن و هیدروژن حتی در حضور کاتالیزگر یا جرقه، هیچ واکنشی رخ نمی‌دهد. جالب است بدانید که تاریخ علم شیمی را می‌توان به دو دوره پیش و پس از تولید صنعتی آمونیاک و اوره تقسیم‌بندی کرد. تا پیش از اختراع راهکار تولید صنعتی این دو ماده، علم شیمی تنها یک علم نظری محسوب می‌شد و حتی با توجه به عدم سرمایه‌گذاری مناسب، در خطر نابودی قرار داشت. اما با این اختراع، جنبه کاربردی این علم مورد توجه واقع شد و پس از آن با سرمایه‌گذاری‌های کافی بر روی این علم، بهینه‌سازی بسیاری از صنایع تولید مواد و منابع مختلف آغاز شد.



۶۴- گاز آمونیاک مطابق معادله موازنه‌نشده $NH_3(g) + O_2(g) \rightarrow NO(g) + H_2O(g)$ می‌سوزد. اگر پس از واکنش میان گاز آمونیاک و گاز اکسیژن با نسبت استوکیومتری مناسب، در ظرفی با فشار ثابت، دمای گاز ۲ برابر شود، حجم گاز درون ظرف به تقریب چند برابر می‌شود؟

۲/۲۲ (۴)

۱/۴۳ (۳)

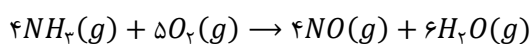
۰/۳۶ (۲)

۰/۵۶ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۸۰ - ۱۰۰۲

پاسخ: گزینه ۴

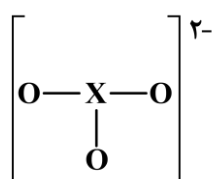
معادله موازنه‌شده واکنش انجام‌شده به صورت زیر است:



همان‌طور که از معادله بالا مشخص است، در این واکنش به ازای مصرف در مجموع ۹ مول گاز، در مجموع ۱۰ مول گاز تولید می‌شود. پس اگر دما و فشار در واکنش ثابت باشد، انتظار داریم حجم گاز $\frac{10}{9}$ برابر شود. اما چون دمای گاز ۲ برابر شده است، حجم گاز نسبت به حالت عدم تغییر دما ۲ برابر خواهد شد. پس در مجموع حجم گاز پس از واکنش $\frac{20}{9} \approx 2/22$ حجم گاز در ابتدا واکنش است.



۶۵- با توجه به ساختار لوویس یون چند اتمی مقابل که همه اتم‌های آن به آرایش هشت‌تایی رسیده‌اند، عنصر X در کدام گروه جدول



دوره‌ای قرار دارد؟

۱۷ (۱)

۱۶ (۲)

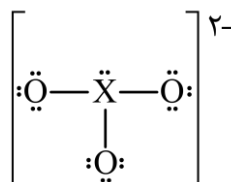
۱۵ (۳)

۱۴ (۴)

(آسان - مفهومی - سریع) - صفحه ۹۱ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۲

برای یافتن شماره گروه عنصر X باید شمار الکترون‌های ظرفیتی این عنصر را پیدا کرد. در ابتدا، همه اتم‌ها را در ساختار یون مورد نظر هشت‌تایی می‌کنیم:



در ساختار این یون، ۳ اتم اکسیژن وجود دارد که شمار الکترون‌های ظرفیتی هر اتم برابر با ۶ است. در این ساختار، یک اتم عنصر X نیز وجود دارد که شمار الکترون‌های ظرفیتی آن را برابر با x فرض می‌کنیم. پس در این یون انتظار دیدن $18 + x + 2 = 20 + x$ الکترون را در قالب جفت الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی داریم. (عدد ۲ تعداد الکترون‌های اضافه یون است، که ناشی از بار یون چند اتمی می‌باشد). در این یون، ۳ جفت الکترون پیوندی و ۱۰ جفت الکترون ناپیوندی و در مجموع ۱۳ جفت الکترون یا ۲۶ الکترون دیده می‌شود.

$$20 + x = 26 \Rightarrow x = 6$$

در نتیجه، عنصر X در اتم خود دارای ۶ الکترون ظرفیتی بوده و متعلق به گروه ۱۶ جدول دوره‌ای است.



۶۶- چند مورد از مطالب زیر در مورد یون سولفات درست است؟

- الف - اصلی ترین یون چنداتمی موجود در آب دریا است.
 ب - بار این یون مربوط به دو اتم اکسیژن در ساختار این یون است.
 ج - همه اتم‌ها در ساختار شیمیایی آن به آرایش هشت تایی می‌رسند.
 د - نسبت شمار جفت الکترون ناپیوندی به شمار جفت الکترون پیوندی برابر ۳ است.

۱ (۴)

۲ (۳)

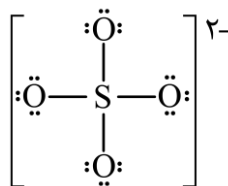
۳ (۲)

۴ (۱)

(متوسط - مفهومی - زمان بر ۱ - صفحه ۹۱ - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

یون سولفات آنیونی چند اتمی با فرمول شیمیایی SO_4^{2-} است که ساختار شیمیایی آن به صورت زیر می‌باشد:



عبارت‌های (الف)، (ج) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

(الف) بیشترین یون‌های موجود در آب دریا، به ترتیب آنیون کلرید و کاتیون سدیم هستند. همچنین بیشترین یون چنداتمی موجود در آب دریا نیز یون سولفات است.

(ب) یون‌های چند اتمی از اتصال ۲ یا چند اتم تشکیل می‌شوند. بار یون‌های چند اتمی را نمی‌توان به اتم خاصی نسبت داد و این بار بر روی کل اتم‌ها پخش است.

(ج) همان‌طور که در ساختار بالا مشخص است، هر ۴ اتم اکسیژن و هم اتم گوگرد، هر کدام ۴ جفت الکترون در اطراف خود دارند و همگی به آرایش هشت تایی رسیده‌اند.

(د) در ساختار این یون، ۴ پیوند اشتراکی یا همان ۴ جفت الکترون پیوندی وجود دارد. همچنین بر روی هر اتم اکسیژن ۳ و در مجموع ۱۲ جفت الکترون ناپیوندی دیده می‌شود. پس نسبت خواسته شده برابر خواهد بود با:

$$A = \frac{12}{4} = 3$$



۶۷- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) کوه‌های یخ بخش عمده منابع غیراقیانوسی آب کره را تشکیل داده‌اند.
 (۲) آب‌های شیرین بخشی از آب کره هستند که از آب خالص تشکیل می‌شوند.
 (۳) از واکنش فراوان ترین کاتیون و آنیون موجود در آب دریا، نمک خوراکی به دست می‌آید.
 (۴) زمین از دیدگاه شیمیایی پویاست و بخش‌های گوناگون آن با یکدیگر برهم کنش‌های فیزیکی و شیمیایی دارند.

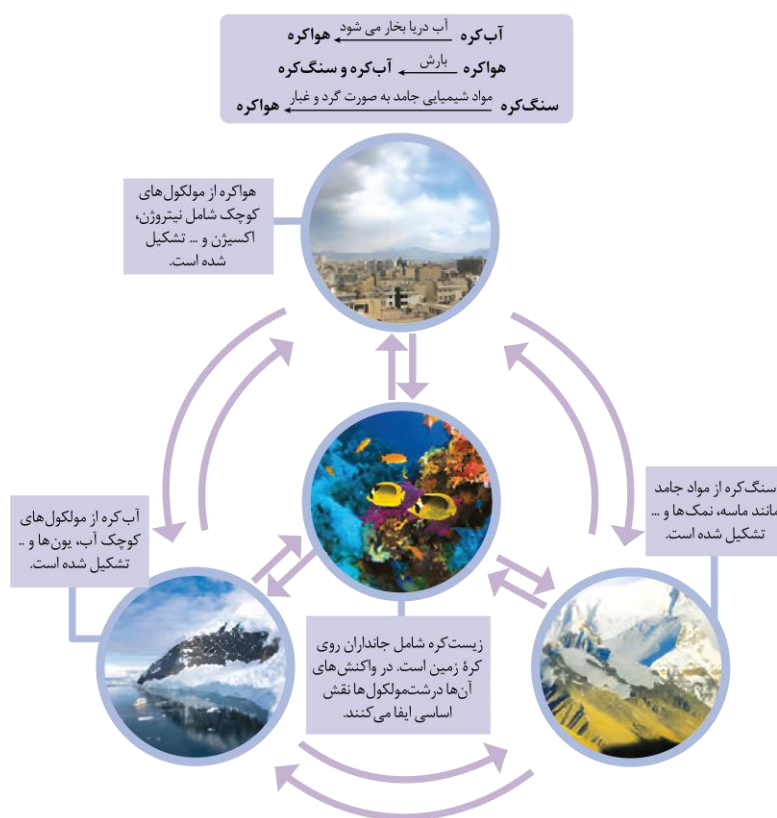
(آسان - حفظی - استاندارد ۱ - صفحه ۸۸ - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

آب‌های شیرین یا همان آب آشامیدنی بخش کوچکی از آب کره هستند. این آب‌ها مخلوطی همگن از یون‌های متفاوت مانند سدیم، کلسیم، منیزیم، آهن (II)، کلرید، نیتрат و هیدروکسید هستند که اکثر این یون‌ها به طور طبیعی در آب حضور دارند و برخی به آب اضافه می‌شوند؛ مانند یون فلوئورید. غلظت این یون‌ها در آب‌های آشامیدنی مختلف، متفاوت بوده و گاهی اوقات به اندازه‌ای غلظت یون‌ها زیاد است که مزه آب تغییر می‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱ منابع اقیانوسی ۹۷/۲ درصد آب کره را تشکیل داده‌اند و از ۲/۸ درصد باقی‌مانده (منابع غیراقیانوسی)، ۲/۱۵ درصد از آب کره مربوط به کوه‌های یخ است. در نتیجه، کوه‌های یخ بخش عمده منابع غیراقیانوسی آب کره را تشکیل داده‌اند.
- ۲ فراوان‌ترین کاتیون و آنیون در آب دریا به ترتیب یون سدیم و یون کلرید است که از واکنش میان این دو یون، سدیم کلرید یا همان نمک خوراکی به دست می‌آید.
- ۴ زمین از دیدگاه شیمیایی پویاست و بخش‌های گوناگون آن با یکدیگر برهم‌کنش‌های فیزیکی و شیمیایی دارند.



۶۸- یون A^- یک آنیون چنداتمی است. کدام فرمول شیمیایی زیر را نمی‌توان به ترکیب یونی آن با یک کاتیون (M) نسبت داد؟

MA (۴)

M_2A_3 (۳)

MA_3 (۲)

MA_2 (۱)

(آسان - مفهومی - سریع - صفحه ۹۲ - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

در یک ترکیب یونی مجموع بار یون آنیون‌ها و کاتیون‌ها باید صفر شود. یعنی مجموع بار یون آنیون‌ها باید قرینه مجموع بار یون کاتیون‌ها باشد. یعنی در ترکیب یونی A_aB_b باید:

$$a \times (\text{بار یون } A) = - (b \times \text{بار یون } B)$$

بار یون A^- برابر ۱- است. پس در ترکیب M_2A_3 مجموع بار یون‌های A برابر ۳- است و باید بار هر یون M ، $\frac{3}{2}+$ باشد که چنین چیزی ممکن نیست. اگر بار یون M به ترتیب ۱+، ۲+ یا ۳+ باشد، فرمول شیمیایی ترکیب یونی این دو یون به ترتیب MA_2 ، MA_3 و MA_3 خواهد بود.

فرمول شیمیایی ترکیبات یونی

برای پیدا کردن فرمول شیمیایی یک ترکیب یونی، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

نماد آنیون نماد کاتیون
بار آنیون بار کاتیون

در نهایت اگر زیروندهای آنیون و کاتیون با یکدیگر ساده شوند، ساده می‌کنیم.

۶۹- کدام یک از موارد زیر درست هستند؟

- الف - در تمام ترکیبات یونی، حداقل یک عنصر فلزی مشاهده می شود.
 ب - برای شناسایی یون کلسیم می توان از محلول سدیم فسفات استفاده کرد.
 ج - در ترکیب کلسیم نیترات، نسبت شمار اتم اکسیژن به کلسیم، برابر ۳ است.
 د - از واکنش محلول کلسیم کلرید با محلول نقره نیترات، رسوب سفید رنگ تولید می شود.
- (۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینه ۴

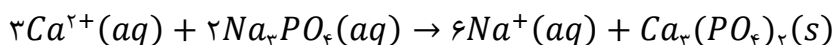
(دشوار - مفهومی - سریع ۱ - صفحه ۹۱ - ۱۰۰۳)

عبارت های «ب» و «د» درست هستند.

بررسی موارد:

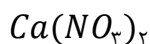
الف) همه کاتیون های تک اتمی، یون های عناصر فلزی هستند؛ اما در میان کاتیون های چند اتمی، یون هایی وجود دارند که در ساختار آن ها عناصر فلزی نقشی ندارند؛ مانند یون آمونیوم. اگر چه اکثر یون های چند اتمی آنیون هستند، اما در میان آن ها کاتیون نیز دیده می شود. پس در ترکیبات یونی مانند آمونیوم سولفات، آمونیوم نیترات، آمونیوم کربنات و ... هیچ عنصر فلزی وجود ندارد.

پ) واکنش یون کلسیم با محلول سدیم فسفات به صورت زیر است:



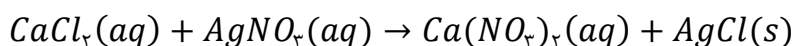
همان طور که مشخص است، در طی این واکنش رسوب کلسیم فسفات تشکیل شده است. در نتیجه، از محلول سدیم فسفات می توان برای تشخیص وجود یون کلسیم در یک محلول استفاده نمود.

ج) بار الکتریکی یون چند اتمی نیترات، -۱ و بار یون کلسیم +۲ است، پس فرمول شیمیایی کلسیم نیترات به صورت $Ca(NO_3)_2$ نیترات کلسیم خواهد بود یعنی:



در هر واحد از این ماده ۶ عنصر اکسیژن و یک عنصر کلسیم وجود دارد. پس نسبت خواسته شده برابر ۶ است.

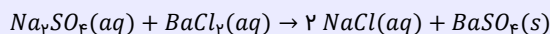
د) واکنش محلول کلسیم کلرید با محلول نقره نیترات به صورت زیر است:



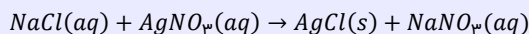
با توجه به واکنش بالا، در این واکنش رسوب سفید رنگ نقره کلرید تولید می شود.

واکنش شناسایی یون ها

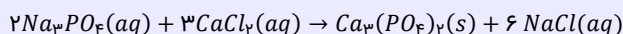
• شناسایی یون باریم به کمک یون سولفات



• شناسایی یون کلرید به کمک یون نقره



• شناسایی یون کلسیم به کمک یون فسفات



همه رسوب های تشکیل شده در واکنش های بالا، سفید رنگ هستند.



۷۰- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) غلظت نمک‌ها در آب باران در هوای پاک بسیار ناچیز است.
- (۲) دریاها مخلوطی ناهمگن از انواع یون‌ها و مولکول‌ها در آب هستند.
- (۳) مجموع جرم مواد محلول موجود در آب‌های کره زمین به تقریب ثابت است.
- (۴) بیشتر آب روی زمین شور است و نمی‌توان از آن در کشاورزی و صنعت استفاده کرد.

پاسخ: گزینه ۲

(آسان - حفظی - سریع ۶ - صفحه ۸۸ - ۱۰۰۳)

دریاها مخلوطی همگن از انواع یون‌ها و مولکول‌ها در آب هستند. نوع و مقدار مواد حل شده در دریاها با یکدیگر متفاوت بوده و به آب‌هایی که به آن دریا می‌ریزند بستگی دارد. خود املاح موجود در این آب‌ها از مواد شیمیایی موجود بر سر راه این آب‌ها در مسیرشان بر روی زمین منشأ می‌گیرند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- ① آب باران در هوای پاک را می‌توان تقریباً خالص در نظر گرفت؛ زیرا تشکیل برف و باران همانند فرایند تقطیر و تولید آب مقطر است که در این روش تقریباً همه مواد حل شده در آب از جمله نمک‌ها و املاح درون آب از آن جدا می‌شوند.
- ② جرم کل مواد حل شده در آب‌های کره زمین تقریباً ثابت است. علت این موضوع برابر بودن جرم املاح وارد شده به آب‌ها و جرم املاح خارج شده از آن‌ها است.
- ④ اگر چه ۷۵ درصد سطح کره زمین را آب پوشانده است؛ اما اکثر این آب شور است و املاح بسیار دارد. پس نمی‌توان از این بخش از آب در مصارف خانگی، کشاورزی و صنعتی استفاده کرد.



میخواهی خواندن پاسخنامه رو راحت تر کنی!
پس بیا پاسخ ویدیویی اش رو ببین!



● پس از پایان آزمون، می‌تونین پاسخنامه ویدیویی و تشریحی این آزمون رو با کلیک یا اسکن کردن این QRcode، از صفحه آپارات آزمون ماز مشاهده کنید.

