



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه یازدهم



پیش خوانی پایه یازدهم

(اختیاری - ویژه دانش آموزان پیشتاز)



ویژه دانش آموزان پایه یازدهم

دفترچه پاسخ

جمعه ۲۷ شهریورماه ۱۴۰۵

- ✓ پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون
- ✓ تحلیل تمام گزینه های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده اید
- ✓ نکات و درسنامه های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال
- ✓ مشاوره تستی؛ برای یادگیری انواع روش های حل تست
- ✓ استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسه آزمون

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

دِرس	مَسْئُول دِرس	طِراحان	وِیرا سِتان
ریاضیات	حسین شفیع زاده مهرداد کیوان سید جواد نظری	حسین شفیع زاده – مهرداد کیوان علی منصف شکری	ندا فرهختی – مائده بادن فیروز یزدان نیک قدم – حمیدرضا ولی پور ارسلان حسنونند – علی اسدی
فیزیک	حسین عبدوی نژاد مروارید شاه حسینی	حسین عبدوی نژاد	سپهر صادقی ایلیا فقیه میرزایی
شیمی	علی ترابی	علی ترابی – پرهام تیزپا فرهنگ امیری – طاها حق بین محمد دارابی جم	معید ایری – امیر حسین مخانی محمد رضا جمشیدی سعیده محبی محمد داود آبادی فراهانی



یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین. راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهاداتتون رو برامون بنویسین.

تابستون؛ سکوی پرتاب به سمت کنکور!

عبور از خط پایان تابستان؛ حالا وقت «جمع‌بندی» و نمایش قدرته!

خسته نباشی قهرمان! تبریک می‌گم؛

آزمون ۲۷ شهریور رو هم پشت سر گذاشتی و این یعنی پرونده یادگیریِ مباحث پایه قبلی عملاً بسته شد. وقتی به مسیر این چند هفته نگاه می‌کنی، متوجه میشی که خیلی فراتر از «درس خوندن ساده» عمل کردی. تو الآن صاحب یک مهارت کلیدی روان‌شناختی شدی: «پیوستگی در شرایط متغیر». در حالی که خیلی از رقبای تو، هنوز درگیرِ رُخوتِ روزهای آخر تابستون هستن یا تازه دارن فکر می‌کنن که «کی باید استارت بزnm؟»، تو همین الآن با خیالی راحت و دانشی که در حافظه بلندمدت تثبیت شده، این دوره رو با موفقیت به پایان رسوندی. این یعنی تو نه فقط درس، بلکه «نظم شخصی» رو هم یاد گرفتی.

اما صبر کن! هنوز یه قدم آخر و سرنوشت‌ساز باقی مونده: **آزمون ۱۰ مهر**. این «آزمون جامع بزرگ»، حکم مراسم اختتامیه تابستان تو رو داره. فرقی با آزمون‌های قبلی اینه که قراره تمام اون قطعات پازلی که توی تابستون شخم زدی و ساختی رو یک‌جا کنار هم بذاری و تصویر کلی رو ببینی. این آزمون، در واقع «سند تأیید زحمات توئه». تا الآن داشتی روی بخش‌های مجزا کار می‌کردی، اما ۱۰ مهر قراره بفهمی چطور می‌تونی اطلاعات پراکنده رو از توی ذهنت فراخوانی کنی و به کار بگیری. این یک «شبه‌سازی ذهنی» از **کنکور اصلیه**؛ فرصتی برای اینکه ببینی چقدر از آموخته‌های مرداد و شهریور، هنوز توی ذهنت زنده و در دسترسه.

می‌دونم که الآن همزمان با مدرسه رفتن و شروع کلاس‌های سال جدید، سراسیمه‌ای و شاید نگران فشارِ درس‌های جدید باشی. اما بذار یه واقعیت علمی جذاب رو بهت بگم: اون «پیش‌خوانی‌هایی» که توی تابستون انجام دادی، الآن دارن به دات می‌رسن. وقتی سر کلاس پایه جدید می‌شینی و می‌بینی معلم داره مفهومی رو توضیح میده که تو قبلاً یه بار با آزمون‌های تابستون تمرینش کردی، همون لحظه‌ست که «سند یادگیری» می‌شکنه. اون حس «من قبلاً اینو دیدم»، همون چیزیه که بهت آرامش میده؛ در حالی که بقیه بچه‌ها دارن با استرس «تازگی مطالب» دست و پنجه نرم می‌کنن، تو داری «تحلیل» می‌کنی. این همون اعتمادبه‌نفس واقعی و ریشه‌داریه که تو رو چند پله از بقیه جلو می‌ندازه.

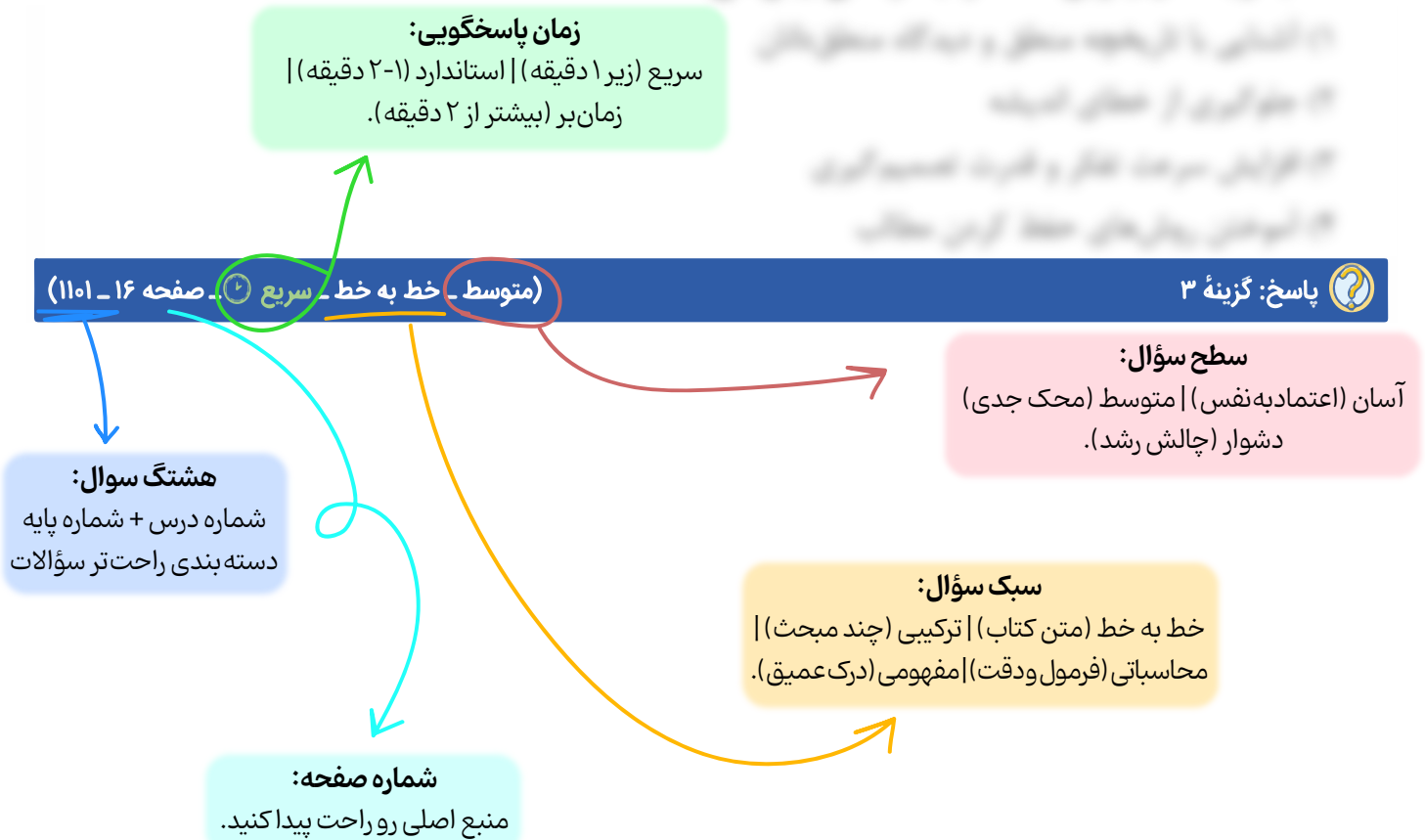
حالا استراتژی برای این چند روز باقی‌مانده تا آزمون جامع چیه؟ خیلی ساده‌ست: «**مرور هوشمندانه و لکه‌گیری**». مطالبی که قبلاً یاد گرفتی رو با بررسی تست‌های آزمون‌های قبلی مرور کن و تا جایی که برنامه‌ات جواب میده مطالبی که نرسیدی توی آزمون‌های قبلی بخونی جبران کن.

رفیق، ۱۰ مهر قرار نیست فقط امتحان بدی؛ قراره با قدرت تمام، پرونده تابستون رو ببندی و مهر رو با برنده‌بودن و اعتمادبه‌نفس حداکثری آغاز کنی. این آزمون، یعنی پایان دوران آماتوری و شروع دوران حرفه‌ای تو. تو حالا دیگه یک کنکوری آماده‌ای که می‌دونه چطور باید از پس حجم بالای مطالب بریاد. برو که با یه نتیجه‌ی درخشان در آزمون جامع، به خودت ثابت کنی که این تابستون، همون «سکو و جهش بزرگی» بوده که از قبل قولش رو داده بودیم. پرچم بالاست،

ما منتظر گزارشِ درخششِ تو در آزمون جامع هستیم؛ این آخرین ضربه برای محکم‌کاریِ موفقیتته! ♥

راهنمای پاسخنامه آزمون‌ها

در ادامه، به منظور آشنایی بیشتر با نحوه پاسخ‌گویی به سوالات، راهنمای پاسخ‌نامه آزمون‌ها تهیه شده است. این راهنما شامل توضیحاتی در مورد نحوه پاسخ‌گویی به سوالات، نحوه علامت‌گذاری سوالات و نحوه پاسخ‌گویی به سوالات است.



یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیری، نه یک مانع.
- ✓ پاسخ‌نامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخ‌نامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیایون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسانی که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.



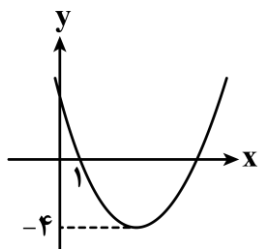
برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامه ویدئویی آزمون

حسابان ۱: جبر و معادله (درس ۲ از ابتدای صفرهای تابع تا پایان درس ۳)، صفحه‌های ۱۰ تا ۲۲
هندسه ۲: دایره (درس ۲)، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۳

بودجه‌بندی
این آزمون

حسابان ۱: این مباحث در مجموع ۲ تست از ۱۰ تست کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۲: از این مباحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.

سهم در
کنکور



۱- نمودار سهمی $f(x) = x^2 + bx + c$ مطابق شکل مقابل است. مقدار bc کدام است؟

- (۱) -۱۸
- (۲) -۱۲
- (۳) -۶
- (۴) -۳۰

(آسان - ترکیبی - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۱۶ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

روش اول

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1 + b + c = 0 \Rightarrow b + c = -1 \quad (*)$$

در ابتدا داریم:

از طرفی، اگر نمودار را ۴ واحد به بالا انتقال دهیم بر محور x مماس می‌شود، پس $f(x) + 4 = 0$ ریشه مضاعف دارد، یعنی:

$$x^2 + bx + c + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4(c + 4) = 0 \xrightarrow{(*)} b^2 - 4(-1 - b + 4) = 0$$

$$\Rightarrow b^2 + 4b - 12 = 0 \Rightarrow (b + 6)(b - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 & \text{غ ق ق} \\ b = -6 & \xrightarrow{(*)} c = 5 \Rightarrow bc = -30 \end{cases}$$

توجه کنید که $x_S = \frac{-b}{2} > 0$ ، پس $b < 0$ است.

روش دوم

$$f(1) = 0 \Rightarrow b + c = -1 \quad (*)$$

$$x_S = \frac{-b}{2} > 0 \Rightarrow b < 0$$

$$y_S = f\left(-\frac{b}{2}\right) = -4 \Rightarrow \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + c = -4$$

$$\xrightarrow{(*)} -\frac{b^2}{4} - 1 - b = -4 \Rightarrow \frac{b^2}{4} + b - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\times 4} b^2 + 4b - 12 = 0 \Rightarrow (b - 2)(b + 6) = 0 \xrightarrow{b < 0} b = -6$$

$$\xrightarrow{(*)} c = -1 + 6 = 5 \Rightarrow bc = -30$$

صفرهای تابع

منظور از صفرهای تابع $f(x)$ همان نقاط برخورد تابع $f(x)$ با محور x ها می‌باشد. برای پیدا کردن صفرهای تابع $f(x)$ کافی است معادله $f(x) = 0$ را حل کنیم.

یه نمونه باحال ببین!

صفرهای تابع $f(x) = x^2 - x - 6$ را محاسبه کنید.

پاسخ تشریحی:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$



۲- تعداد جواب‌های معادله $|x - 2| = -x^2 + 4x + 2$ کدام است؟

۴) صفر

۳) ۴

۲) ۲

۱) ۱

(آسان - خطبه‌خط - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۱۶ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

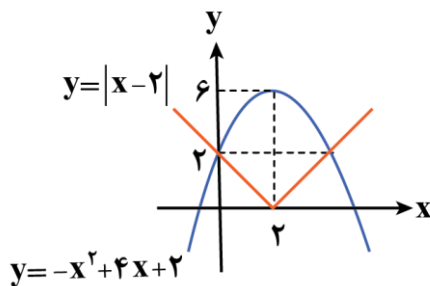
روش اول

با روش هندسی و ترسیم نمودارها، تعداد جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم. برای رسم $y = -x^2 + 4x + 2$ داریم:

$$y = -(x - 2)^2 + 6$$

پس محور تقارن آن بر محور تقارن $y = |x - 2|$ منطبق است و رأس سهمی بالای محور x هاست.

پس با توجه به شکل، دو نمودار در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.



روش دوم

برای حل معادله به روش جبری دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$1) x \geq 2 \Rightarrow \underbrace{|x - 2|}_{+ \text{ یا صفر}} = -x^2 + 4x + 2 \Rightarrow x - 2 = -x^2 + 4x + 2 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \text{ غلط} \\ x = 4 \text{ صحیح} \end{cases}$$

$$2) x < 2 \Rightarrow \underbrace{|x - 2|}_{-} = -x^2 + 4x + 2 \Rightarrow -x + 2 = -x^2 + 4x + 2 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ صحیح} \\ x = 5 \text{ غلط} \end{cases}$$

پس معادله دارای دو جواب $x = 4$ و $x = 0$ است.

روش هندسی حل معادله

برای حل معادله $f(x) = g(x)$ به کمک رسم کافی است نمودار توابع f و g را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم. طول نقاط تلاقی دو نمودار جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ است.

توجه!

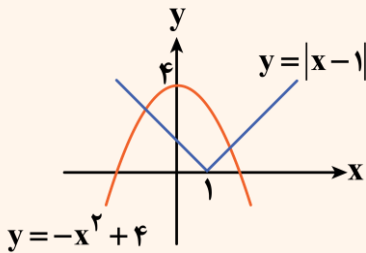
از این روش بیشتر در محاسبه تعداد جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ کمک می‌گیریم.

یه نمونه باحال ببین!

معادله $-x^2 + 4 = |x - 1|$ چند جواب دارد؟

پاسخ تشریحی:

نمودار $y = |x - 1|$ و $y = -x^2 + 4$ را با هم در یک دستگاه رسم می‌کنیم. نمودارها یکدیگر را در ۲ نقطه قطع می‌کنند، پس معادله ۲ جواب دارد.

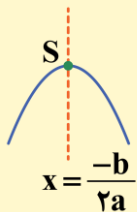


رأس سهمی و محور تقارن آن

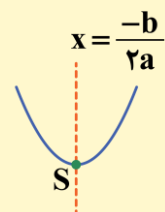
نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$; ($a \neq 0$) یک سهمی است که خط عمودی $x = \frac{-b}{2a}$ **محور تقارن** آن است. هر سهمی دارای

یک نقطه **رأس** S است که **روی محور تقارن** قرار دارد، پس: $x_S = \frac{-b}{2a}$.

(۲) $a < 0$



(۱) $a > 0$



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{رأس سهمی: } \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) \\ \text{محور تقارن: } x = -\frac{b}{2a} \end{array} \right.$$

۳- معادلات $\sqrt{4x+1} = x+1$ و $\frac{2x}{x+2} + a = x$ دارای یک ریشه مشترک غیرصفر هستند. مقدار a کدام است؟

(۴) -۱

(۳) ۱

(۲) ۲

(۱) -۲

(آسان - محاسباتی - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۱۵ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا معادله رادیکالی را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{4x+1} = x+1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4x+1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{ریشه مشترک: } x = 2 \\ \text{ریشه غیرمشترک: } x = 0 \end{cases}$$

$x = 2$ ریشه مشترک است، پس در معادله گویا صدق می‌کند:

$$\frac{4}{4} + a = 2 \Rightarrow a = 1$$

حل معادلات رادیکالی

برای حل یک معادله رادیکالی، عبارت رادیکالی را در **یک طرف تساوی** نگه می‌داریم و **بقیه عبارت‌ها** را به **طرف دیگر تساوی** می‌بریم. سپس با **توان‌رسانی** رادیکال را از بین می‌بریم و معادله حاصل را حل می‌کنیم.

اگر معادله شامل k عبارت رادیکالی باشد باید k بار عملیات توان‌رسانی را انجام دهیم تا همه رادیکال‌ها از بین بروند.

توجه!

توجه کنید که در نهایت جواب‌های حاصل را در معادله اصلی امتحان کنید، چون با توان‌رسانی ممکن است جواب اضافی ایجاد شود.

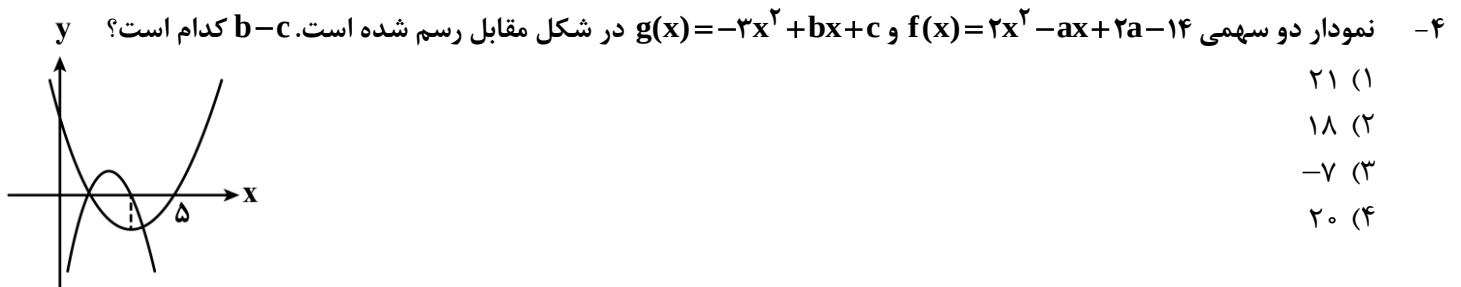
یه نمونه باحال ببین!

$$\sqrt{x+1}+2x=1 \Rightarrow \sqrt{x+1}=1-2x \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+1=1+4x^2-4x \Rightarrow 4x^2-5x=0 \Rightarrow x(4x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$x=0: \sqrt{0+1}+0=1 \Rightarrow 1=1 \checkmark$$

$$x=\frac{5}{4}: \sqrt{\frac{5}{4}+1}+\frac{5}{2}=1 \Rightarrow \frac{3}{2}+\frac{5}{2}=1 \Rightarrow 4=1 \times$$

پس فقط $x=0$ قابل قبول است.



(متوسط - محاسباتی - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۱۱ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

$$f(5)=0$$

$x=5$ یکی از صفرهای سهمی $y=f(x)$ است، پس:

$$\Rightarrow 50-5a+2a-14=0 \Rightarrow 3a=36 \Rightarrow a=12$$

$$\Rightarrow f(x)=2x^2-12x+10 \Rightarrow f(x)=2(x-1)(x-5)$$

$$\Rightarrow x_S = \frac{1+5}{2} = 3$$

یعنی $S \Big|_{-8}^3$ رأس سهمی $y=f(x)$ است و صفر دیگر آن $x=1$ است، پس صفرهای سهمی $y=g(x)$ یکی $x=1$ و دیگری $x=3$ است:

$$g(x)=-3(x-1)(x-3)=-3(x^2-4x+3)$$

$$g(x)=-3x^2+12x-9 \Rightarrow \begin{cases} b=12 \\ c=-9 \end{cases} \Rightarrow b-c=21$$

دام تستی!

اگر فراموش کنید -3 را در -4 و $+3$ ضرب کنید $b-c=-7$ به دست می آید و به گزینه «۳» می رسید.



۵- اگر α و β جواب های معادله $\frac{6}{x}=2+\frac{x-3}{x+1}$ باشند، معادله درجه دومی با ریشه های 2β و 3α کدام است؟

$$x^2-18x+7=0 \quad (۱) \quad x^2-7x-18=0 \quad (۲) \quad x^2+7x-18=0 \quad (۳) \quad x^2-18x+7=0 \quad (۴)$$

(متوسط - خط به خط - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۲۲ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

روش اول

ابتدا معادله را حل می کنیم. برای این کار، طرفین معادله را در $x(x+1)$ یعنی ک.م.م. مخرج ها ضرب می کنیم.

$$6(x+1)=2x(x+1)+(x-3)x \Rightarrow 6x+6=2x^2+2x+x^2-3x \Rightarrow 3x^2-7x-6=0$$

$$\Rightarrow (x-3)(3x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha=3 \\ \beta=-\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha=9 \\ 3\beta=-2 \end{cases}$$

$$(x+2)(x-9)=0 \Rightarrow x^2 - 7x - 18 = 0$$

معادله درجه دوم با ریشه‌های ۹ و -۲ می‌خواهیم، پس:

روش دوم

با حل معادله گویا داریم:

$$6(x+1) = 2x(x+1) + x(x-3) \Rightarrow 6x+6 = 2x^2 + 2x + x^2 - 3x$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{7}{3} \\ \alpha\beta = -\frac{6}{3} = -2 \end{cases}$$

حال معادله‌ای را می‌خواهیم که ریشه‌های آن 3α و 3β باشند:

$$\begin{cases} S = 3\alpha + 3\beta = 3(\alpha + \beta) = 7 \\ P = (3\alpha)(3\beta) = 9(\alpha\beta) = -18 \end{cases}$$

بنابراین:

$$x^2 - Sx + P = 0 \xrightarrow{S=7, P=-18} x^2 - 7x - 18 = 0$$

نوشتن معادله درجه دو با داشتن S و P

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن‌گاه:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

به این ترتیب، اگر S و P به ترتیب مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، آن معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x^2 - Sx + P = 0$$



۶- اگر α و β دو جواب معادله $\frac{5}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} = 2$ باشند، حاصل $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1}$ چه عددی است؟

۴) ۸/۰

۳) ۹/۰

۲) ۲/۱

۱) ۱/۱

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۲۲ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

اگر فرض کنیم $\sqrt{x} = t$ ، آن‌گاه:

$$\frac{5}{t+2} + \frac{1}{t-2} = 2 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{5t-8}{t^2-4} = 2 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2(t^2-4) = 2(3t-4)$$

$$\Rightarrow t^2 = 3t \Rightarrow \begin{cases} t=0 \Rightarrow \sqrt{x}=0 \Rightarrow \alpha=0 \\ t=3 \Rightarrow \sqrt{x}=3 \Rightarrow \beta=9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{1}{0+1} + \frac{1}{9+1} = 1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10}$$

بدون تغییر متغیر هم داریم: $\frac{5}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} = 2 \xrightarrow{\times(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} 5(\sqrt{x}-2) + (\sqrt{x}+2) = 2(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)$

$$\Rightarrow 6\sqrt{x} - 8 = 2(x-4) \Rightarrow 6\sqrt{x} = 2x \Rightarrow 3\sqrt{x} = x$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 9x = x^2 \Rightarrow x^2 - 9x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ ق ق} \\ \beta = 9 \text{ ق ق} \end{cases}$$

و ادامه ماجرا شبیه روش اول است.

روش تغییر متغیر برای حل معادلات

برای حل برخی معادلات که ظاهری پیچیده دارند ولی **عبارتی** در آن‌ها **تکرار** می‌شود می‌توان از روش تغییر متغیر استفاده کرد، بدین صورت که **عبارت تکرار شده** را پیدا و به صورت یک **متغیر جدید** تعریف می‌کنیم و متغیر را عوض می‌کنیم تا ظاهر معادله ساده‌تر (معمولاً شبیه به معادله درجه دوم) شود و بعد از حل معادله جدید، مقدار **متغیر جدید** را در **معادله تغییر متغیر جای‌گذاری** می‌کنیم و معادله را حل می‌کنیم تا جواب‌های معادله اولیه به دست آیند.

یه نمونه باحال ببین!

$$\text{معادله } 72 + 18(x^2 + x) - (x^2 + x)^2 = 0 \text{ را حل کنید.}$$

$$A = x^2 + x \text{ فرض می‌کنیم، بنابراین:}$$

$$A^2 - 18A + 72 = 0 \Rightarrow (A-6)(A-12) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=12 \Rightarrow x^2+x=12 \Rightarrow x^2+x-12=0 \Rightarrow (x+4)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=3 \end{cases} \\ A=6 \Rightarrow x^2+x=6 \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow (x+3)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=2 \end{cases} \end{cases}$$



۷- ماشین A به تنهایی ۱۵ روز زودتر از ماشین B کار را تمام می‌کند و اگر هر دو ماشین با هم کار کنند، در ۱۸ روز کار تمام می‌شود. بعد از n روز کار مشترک ماشین A خراب شده و ماشین B مابقی کار را در طی ۱۵ روز تمام می‌کند. n کدام است؟

۶ (۴)

۱۲ (۳)

۹ (۲)

۱۵ (۱)

(سخت - محاسباتی - زمان بر) - حسابان ۱ صفحه ۲۲ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

ترجمه صورت سؤال

«ماشین A به تنهایی ۱۵ روز زودتر از ماشین B کار را تمام می‌کند.» یعنی اگر ماشین A در a روز کار را تمام کند، این a روز به علاوه ۱۵ روز دیگر برابر با مدت زمانی است که ماشین B کار را تمام می‌کند.

اگر A به تنهایی در a روز و B به تنهایی در b روز کار را تمام کنند، $b = a + 15$ ، پس در یک روز داریم:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{a+15} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow \frac{2a+15}{a(a+15)} = \frac{1}{18} \Rightarrow a^2 + 15a = 36a + 270$$

$$\Rightarrow a^2 - 21a - 270 = 0 \Rightarrow (a-30)(a+9) = 0 \xrightarrow{a>0} \begin{cases} a=30 \text{ به تنهایی در } 30 \text{ روز کار را تمام می‌کند} \\ b=45 \text{ به تنهایی در } 45 \text{ روز کار را تمام می‌کند} \end{cases}$$

ادامه کار با B $\uparrow$ n روز کار مشترک

$$\frac{n}{a} + \frac{n}{b} + \frac{15}{b} = 1$$

حال در ادامه داریم:

$$\Rightarrow n\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 - \frac{15}{b} \xrightarrow[\substack{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{18} \\ b=45}]{\frac{1}{18} + \frac{1}{45} = \frac{1}{10}} \frac{n}{18} = 1 - \frac{15}{45} \Rightarrow \frac{n}{18} = \frac{2}{3} \Rightarrow n = \frac{2 \times 18}{3} = 12$$

مسائل همکاری و معادلات گویا

نوع خاصی از سؤالات هستند که در آن یک کار با همکاری چند نفر یا چند وسیله انجام می‌شود. برای تشکیل معادله این سؤالات باید ابتدا همه اطلاعات داده شده را برحسب یک واحد زمانی بنویسیم و معمولاً باید مقدار کاری که هر نفر یا هر وسیله در یک واحد زمان انجام می‌دهد را به دست آوریم و بعد عملکرد آن‌ها را با هم جمع کنیم، تا به جواب نهایی برسیم.

یه نمونه باحال ببین!

علی در ۶ روز و محمد در ۱۲ روز دیواری را کاشی می‌کند. اگر این دو نفر با هم کار کنند در چند روز دیوار کاشی می‌شود؟

پاسخ تشریحی:

اطلاعات صورت سؤال یعنی علی روزی $\frac{1}{6}$ و محمد روزی $\frac{1}{12}$ دیوار را کاشی می‌کنند. اگر با هم کار کنند روزی $\frac{1}{4}$ از کل کار انجام می‌شود و در نتیجه دیوار در ۴ روز کاشی می‌شود.



۸- در یک مستطیل با نسبت طلایی، مساحت $2+2\sqrt{5}$ است. عرض مستطیل کدام است؟

(۱) $1+\sqrt{5}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{5}-1$ (۴) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(آسان - خطبه‌خط - سریع) حسابان ۱ صفحه ۱۹-۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{L}{W} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow L = \frac{1+\sqrt{5}}{2} W$$

اگر فرض کنیم طول و عرض مستطیل L و W باشند، آن‌گاه داریم:

$$S = L \times W = \frac{1+\sqrt{5}}{2} W^2 = 2(1+\sqrt{5})$$

$$\xrightarrow{\div (1+\sqrt{5})} \frac{1}{2} W^2 = 2 \Rightarrow W^2 = 4 \xrightarrow{W>0} W = 2$$

دام تستی!

اگر اشتباهی طول مستطیل را به دست آورید، به گزینه «۱» می‌رسید.

مقدار نسبت طلایی از کجا اومد؟

اگر در یک مستطیل با طول x و عرض y رابطه زیر برقرار باشد، در این صورت به آن مستطیل، «مستطیل طلایی» و به نسبت $\frac{x}{y}$ «نسبت طلایی» می‌گوییم.

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$$

اگر نسبت $\frac{x}{y}$ را برابر با t فرض کنیم، داریم:

$$\frac{x}{y} = t \xrightarrow{\frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x} = 1 + \frac{1}{t}} t = 1 + \frac{1}{t} \Rightarrow t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ غف} \end{cases}$$

توجه داشته باشید که عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ به **عدد طلایی** معروف است و مقدار تقریبی آن $1/618$ است. بنابراین می‌توان گفت که در یک مستطیل طلایی نسبت طول به عرض آن برابر است با:

$$t = \frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



۹- ۲۵۰ کیلوگرم آب نمک با غلظت ۴ درصد را با n کیلوگرم آب نمک با غلظت ۲ درصد در یک ظرف بزرگ‌تر ریخته‌ایم. اگر در کل غلظت به $3/25$ درصد برسد، n کدام است؟

۵۰ (۴)

۱۵۰ (۳)

۲۰۰ (۲)

۱۰۰ (۱)

(متوسط - خط به خط - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۷ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

برای یافتن n ، ابتدا غلظت کل را با توجه به غلظت محلول‌ها به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \text{غلظت} &= \frac{\overbrace{250 \times \frac{4}{100}}^{\text{نمک محلول اول}} + \overbrace{n \times \frac{2}{100}}^{\text{نمک محلول دوم}}}{\underbrace{n+250}_{\text{کل محلول}}} = \frac{3}{25} \\ \xrightarrow{\times 100(n+250)} 4(250) + 2n &= \frac{3}{25}(n+250) \Rightarrow 1000 + 2n = \frac{3}{25}n + 32 \times 25 \\ \Rightarrow \frac{3}{25}n - 2n &= 1000 - 812 \Rightarrow \frac{1}{25}n = 188 \Rightarrow n = \frac{188 \times 25}{1} = 4700 \end{aligned}$$

یادی کنیم از شیمی!

اگر بخواهیم غلظت یک محلول (مانند آب نمک) را برحسب درصد به دست آوریم کافی است **جرم حل شونده** (نمک) را بر **جرم محلول** تقسیم کرده و جواب را در ۱۰۰ ضرب کنیم.

$$\text{غلظت برحسب درصد} = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 100$$

توجه داریم جرم محلول برابر مجموع جرم حلال و حل شونده است.



۱۰- اگر معادله $\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{5}{16}$ دارای دو ریشه α و β باشد، مقدار $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

-۲ (۴)

۲ (۳)

 $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

(سخت - محاسباتی - زمان بر) - حسابان ۱ صفحه ۱۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

روش اول

به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای داریم:

$$\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{5}{16} \Rightarrow \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 = \frac{5}{16} \Rightarrow \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)^2 + \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{5}{16}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-2}{(x+1)(x-1)}\right)^2 - \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{5}{16}$$

با فرض آن که $\frac{-2}{(x+1)(x-1)} = A$ داریم:

$$A^2 - A = \frac{5}{16} \Rightarrow A^2 - A + \frac{1}{4} = \frac{5}{16} + \frac{1}{4} \Rightarrow \left(A - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow A = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{-2}{x^2-1} = \frac{5}{4} \Rightarrow x^2-1 = -\frac{8}{5} \Rightarrow x^2 = -\frac{3}{5} \text{ غ ق ق} \\ A - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow A = -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-2}{x^2-1} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x^2-1 = 8 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -3 \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = -1 - 1 = -2 \end{cases}$$

روش دوم

$$\frac{2x^2+2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{5}{16} \Rightarrow \frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{5}{16}$$

$$\Rightarrow 5(x^2-1)^2 = 32(x^2+1) \Rightarrow 5(x^4-2x^2+1) = 32x^2+32$$

$$\Rightarrow 5x^4-42x^2-27=0$$

حال $t = x^2$ را به چشم یک متغیر جدید می‌بینیم و معادله را حل می‌کنیم:

$$\Rightarrow 5(x^2)^2 - 42x^2 - 27 = 0 \Rightarrow 5t^2 - 42t - 27 = 0$$

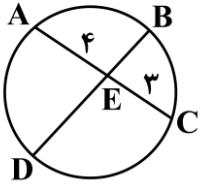
$$\Rightarrow (5t+3)(t-9) = 0 \Rightarrow \underbrace{(5x^2+3)}_{\text{ناصفر}}(x^2-9) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -3 \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = -2$$

اتحاد مربع دوجمله‌ای و کاربردی از آن!

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = (a \pm b)^2 \mp 2ab$$

۱۱- در دایره شکل مقابل، وتر AC، وتر BD را به نسبت ۱ به ۳ تقسیم کرده است. طول وتر BD کدام است؟



- (۱) ۶
(۲) ۷
(۳) ۸
(۴) ۹

(آسان - خط به خط - سریع) - هندسه ۲ صفحه ۱۸ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم که وتر AC، وتر BD را به نسبت ۱ به ۳ تقسیم کرده است، پس:

$$\begin{cases} BE = x \\ DE = 3x \end{cases}$$

$$AE \times EC = BE \times ED$$

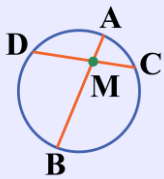
$$4 \times 3 = x \times 3x \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$BD = BE + DE = x + 3x = 4x = 4(2) = 8$$

حال با روابط طولی در دایره خواهیم داشت:

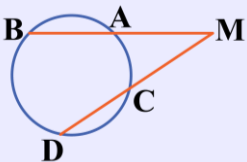
بنابراین طول وتر BD برابر است با:

روابط طولی در دایره
تقاطع دو وتر:



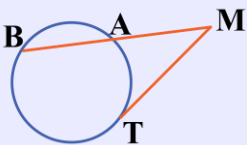
$$MA \times MB = MC \times MD$$

تقاطع دو خط قاطع (برخورد امتداد وترها در خارج دایره):



$$MA \times MB = MC \times MD$$

تقاطع خط مماس و خط قاطع (امتداد وتر):

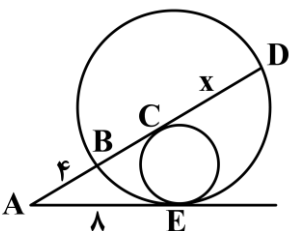


$$MA \times MB = MT^2$$



۱۲- مطابق شکل زیر، دو دایره در نقطه E مماس داخل هستند و AE به طول ۸ بر هر دوی آن‌ها مماس است. اگر $AB = 4$ باشد، اندازه

پاره خط CD کدام است؟

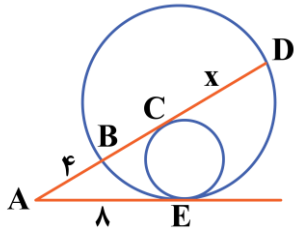


- (۱) ۴
(۲) ۶
(۳) ۸
(۴) ۱۰

(آسان - مفهومی - سریع) - هندسه ۲ صفحه ۱۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم طول دو مماسی که از یک نقطه خارج دایره بر آن رسم می‌شوند با هم برابر است.



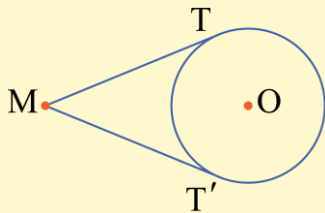
$$AC = AE \Rightarrow AB + BC = 8 \Rightarrow 4 + BC = 8 \Rightarrow BC = 4$$

حال از نقطه A یک مماس و یک قاطع بر دایره بزرگ تر رسم شده است، بنابراین داریم:

$$AE^2 = AB \cdot AD \Rightarrow 8^2 = 4(4 + 4 + x) \Rightarrow x = 8$$

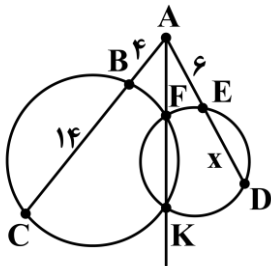
طول دو مماس رسم شده بر دایره از نقطه ای خارج از دایره

اگر از نقطه ای خارج از دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم، طول این دو مماس با یکدیگر برابر است.



$$MT = MT'$$

۱۳- مطابق شکل مقابل، دو دایره متقاطع در نقاط F و K مفروض اند. اگر $AB = 4$ ، $AE = 6$ و $BC = 14$ باشد، اندازه پاره خط ED کدام است؟

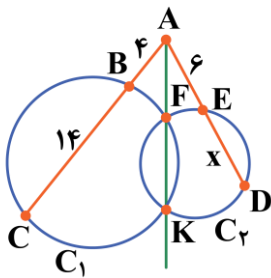


- است؟
- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶

(متوسط - مفهومی/خط به خط - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۱۸ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

از نقطه A دو قاطع بر دایره C1 رسم شده است، بنابراین:



$$AB \cdot AC = AF \cdot AK \quad (1)$$

همچنین از نقطه A دو قاطع نیز بر دایره C2 رسم شده است، بنابراین:

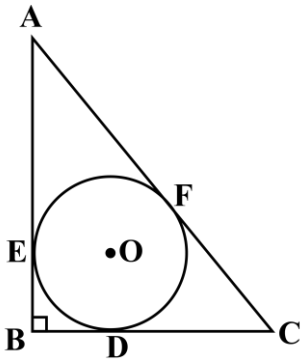
$$AF \cdot AK = AE \cdot AD \quad (2)$$

با مقایسه روابط (۱) و (۲) داریم:

$$AB \cdot AC = AE \cdot AD \Rightarrow (4)(4 + 14) = (6)(6 + x)$$

$$\Rightarrow 4 \times 18 = 6 \times (6 + x) \Rightarrow 6 + x = 12 \Rightarrow x = 6$$

۱۴- در مثلث قائم الزاویه شکل مقابل، دایره به مرکز O بر اضلاع قائم AB و BC به ترتیب در نقاط E و D و بر وتر AC در نقطه F مماس است. اگر $AE = 4$ و $FC = 6$ باشد، شعاع این دایره کدام است؟



(۲) ۲

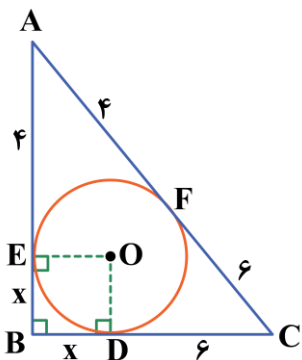
(۴) ۳

(۱) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۱۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم که طول مماس‌های رسم شده بر یک دایره از نقطه‌ای خارج از آن با هم برابر است، بنابراین:



$$\begin{cases} AF = AE = 4 \\ CD = CF = 6 \\ BE = BD = x \end{cases}$$

از طرفی به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه ABC خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 &= AC^2 \Rightarrow (4+x)^2 + (6+x)^2 = 10^2 \\ \Rightarrow (16 + 8x + x^2) + (36 + 12x + x^2) &= 100 \\ \Rightarrow 2x^2 + 20x + 52 &= 100 \Rightarrow 2x^2 + 20x - 48 = 0 \\ \xrightarrow{\div 2} x^2 + 10x - 24 &= 0 \Rightarrow (x+12)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \checkmark \\ x = -12 \times \end{cases} \end{aligned}$$

می‌دانیم که شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که چهارضلعی OEBD مربعی به ضلع $x = 2$ است، در نتیجه شعاع دایره برابر ۲ است.

توجه!

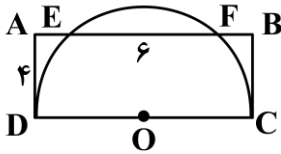
توجه داشته باشید که چهارضلعی OEBD مستطیلی است که دو ضلع مجاور آن با هم برابر است.

یادآوری!

مستطیلی که دو ضلع مجاور آن با هم برابر باشد، یک مربع است.



۱۵- قطر نیم‌دایره شکل مقابل روی ضلع DC از مستطیل ABCD قرار گرفته است و بر اضلاع AD و BC به ترتیب در نقاط D و C مماس است. اگر $AD=4$ و $EF=6$ باشد، شعاع نیم‌دایره کدام است؟



(۱) ۴/۵

(۲) ۵

(۳) ۵/۵

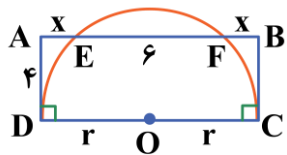
(۴) ۶

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۱۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

روش اول

از نقطه A یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم شده است، بنابراین:



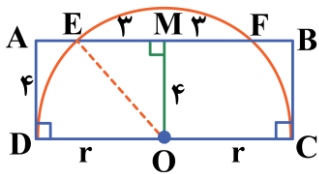
$$AD^2 = AE \cdot AF \Rightarrow 4^2 = x(x+6) \Rightarrow x^2 + 6x - 16 = 0 \Rightarrow (x+8)(x-2) = 0 \xrightarrow{x>0} x=2$$

$$2r = x + EF + x \Rightarrow 2r = 2 + 6 + 2 \Rightarrow 2r = 10 \Rightarrow r = 5$$

بنابراین خواهیم داشت:

روش دوم

از نقطه O عمودی بر EF وارد می‌کنیم که در این صورت:



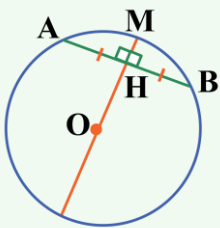
$$EM = MF = \frac{EF}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه OEM به کمک قضیه فیثاغورس، داریم:

$$OE^2 = EM^2 + OM^2 \Rightarrow OE = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow OE = r = 5$$

شعاع عمود بر وتر

مطابق شکل، خطی که از مرکز دایره گذشته و بر وتر AB عمود است، وتر AB و کمان $\widehat{AB}$ را نصف می‌کند و برعکس.



$$OH \perp AB \Leftrightarrow \begin{cases} AH = HB \\ \widehat{AM} = \widehat{MB} \end{cases}$$

۱۶- دو دایره $C(O, 2r+1)$ و $C'(O', 3r-2)$ مماس خارج هستند. اگر طول خط‌المركزین آن‌ها ۹ باشد، مساحت دایره $C''(O'', r)$ کدام است؟

(۴) 9π (۳) 4π (۲) 3π (۱) 2π

(آسان - خط‌به‌خط - سریع) - هندسه ۲ صفحه ۲۰ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم در دو دایره مماس خارج رابطه $d = R + R'$ برقرار است، بنابراین:

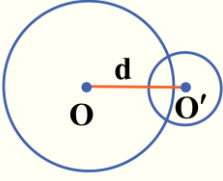
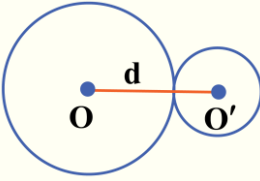
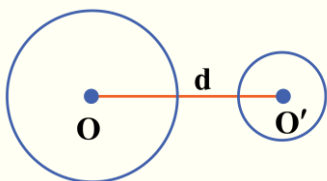
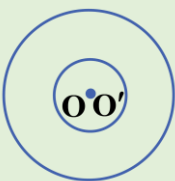
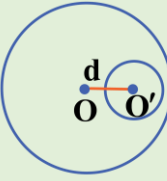
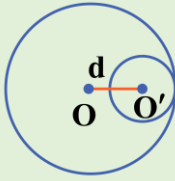
$$9 = (2r+1) + (3r-2) \Rightarrow 5r = 10 \Rightarrow r = 2$$

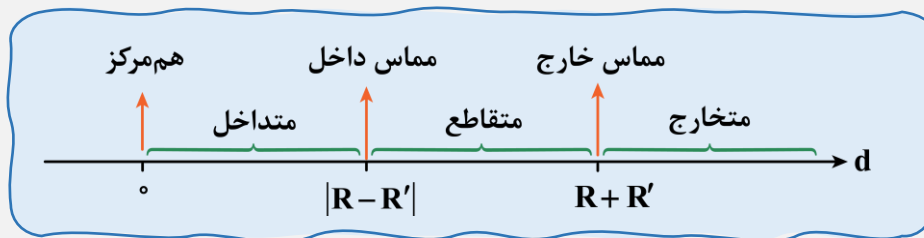
بنابراین مساحت دایره C'' برابر است با:

$$S = \pi r^2 = \pi \times 2^2 = 4\pi$$

 وضعیت دو دایره نسبت به هم

دو دایره C و C' دارای وضعیت‌های زیر نسبت به هم هستند:

۳. متقاطع  $R - R' < d < R + R'$ تعداد مماس مشترک داخلی = ۰ تعداد مماس مشترک خارجی = ۲	۲. مماس خارج  $d = R + R'$ تعداد مماس مشترک داخلی = ۱ تعداد مماس مشترک خارجی = ۲	۱. متخارج  $d > R + R'$ تعداد مماس مشترک داخلی = ۲ تعداد مماس مشترک خارجی = ۲
۶. هم‌مرکز  $d = 0$ تعداد مماس مشترک داخلی = ۰ تعداد مماس مشترک خارجی = ۰	۵. متداخل  $d < R - R'$ تعداد مماس مشترک داخلی = ۰ تعداد مماس مشترک خارجی = ۰	۴. مماس داخل  $d = R - R'$ تعداد مماس مشترک داخلی = ۰ تعداد مماس مشترک خارجی = ۱

 وضعیت دو دایره در یک نگاه


۱۷- دو دایره متخارج دارای مماس مشترک داخلی به طول $\sqrt{15}$ هستند. اگر طول خط‌المركزین دو دایره ۸ باشد، کمترین فاصله بین دو دایره کدام است؟

(۴) ۲

(۳) ۱/۵

(۲) ۱

(۱) ۵/۰

(آسان - خط‌به‌خط - سریع) - هندسه ۲ صفحه ۲۲ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم که طول مماس مشترک داخلی دو دایره برابر $\sqrt{15}$ است، پس:

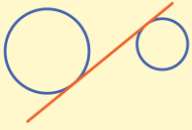
$$\sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{15} \Rightarrow \sqrt{8^2 - (R + R')^2} = \sqrt{15} \Rightarrow (R + R')^2 = 49 \Rightarrow R + R' = 7$$

در نتیجه کمترین فاصله بین دو دایره برابر است با:

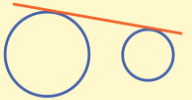
$$MN = d - (R + R') = 8 - 7 = 1$$

محاسبه طول مماس مشترک

مماس مشترک داخلی یعنی خط مماسی که دو دایره، دو طرف آن واقع هستند.



مماس مشترک خارجی یعنی خط مماسی که هر دو دایره در یک طرف آن واقع هستند.



طول مماس های مشترک داخلی و خارجی دو دایره در صورت وجود از روابط زیر محاسبه می شوند:

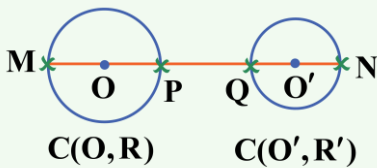
$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

اگر دو دایره مماس بیرون باشند، طول مماس مشترک خارجی دو دایره برابر $2\sqrt{RR'}$ می باشد.

محاسبه بیشترین و کمترین فاصله نقاط دو دایره متخارج

• بیشترین فاصله نقاط دو دایره:



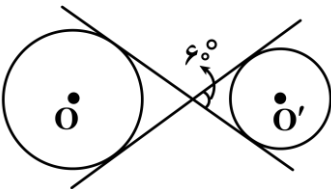
$$MN = OO' + (R + R')$$

• کمترین فاصله نقاط دو دایره:

$$PQ = OO' - (R + R')$$



۱۸- زاویه بین مماس مشترک های داخلی دو دایره $C(O, 5)$ و $C'(O', 3)$ برابر 60° است. طول مماس مشترک خارجی این دو دایره کدام است؟



(۱) $3\sqrt{7}$

(۲) $6\sqrt{7}$

(۳) $5\sqrt{6}$

(۴) ۱۲

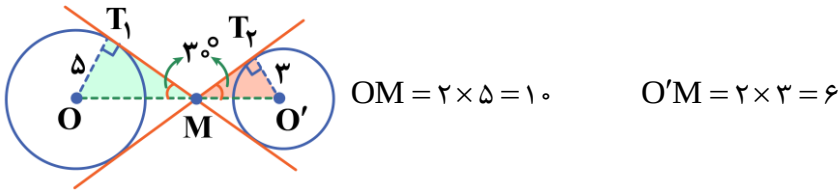
(متوسط - خط به خط - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۲۱ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

روش اول

یک شکل فرضی رسم می کنیم و از O و O' عمودهایی بر مماس مشترک های داخلی رسم می کنیم. در مثلث های رنگ شده زاویه های مشخص شده برابر 30° است، زیرا خط المרכזین نیمساز زاویه بین مماس مشترک هاست. (طبق بند «ب» کار در کلاس صفحه ۲۰)

حال در مثلث‌های قائم‌الزاویه رنگ شده، ضلع روبه‌رو به زاویه 30° نصف وتر است، پس:



بنابراین $OO' = 10 + 6 = 16$ ، حال طول مماس مشترک خارجی دو دایره برابر است با:

$$L = \sqrt{d^2 - (R_1 - R_2)^2} = \sqrt{16^2 - (5 - 3)^2} = \sqrt{256 - 4} = \sqrt{252} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 7} = 6\sqrt{7}$$

روش دوم

برای دو مماس مشترک داخلی، رابطه $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{R + R'}{d}$ برقرار است، پس:

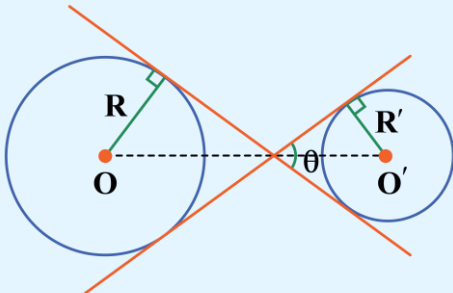
$$\theta = 60^\circ \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{5 + 3}{d} \Rightarrow d = 16$$

بنابراین طول مماس مشترک خارجی برابر است با:

$$L = \sqrt{d^2 - (R_1 - R_2)^2} = \sqrt{16^2 - (5 - 3)^2} = \sqrt{256 - 4} = \sqrt{252} = 6\sqrt{7}$$

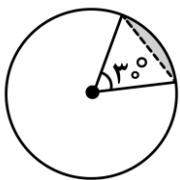
فرمول برای فرمول دوست‌ها!

اگر دو خط d_1 و d_2 مماس‌های مشترک داخلی دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ باشند و با یکدیگر زاویه θ بسازند، زاویه بین آن‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{R + R'}{d}$$

۱۹- اگر محیط دایره شکل مقابل، برابر 8π باشد، مساحت قطعه رنگ شده کدام است؟



(۱) $4(\pi - 3)$

(۲) $8(\pi - 3)$

(۳) $4(1 - \frac{\pi}{6})$

(۴) $4(\frac{\pi}{3} - 1)$

(متوسط - خط‌بخط - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۲۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

محیط دایره برابر $2\pi R$ است، بنابراین:

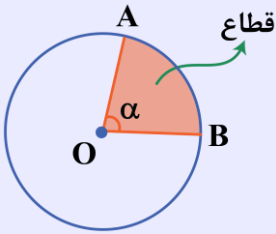
$$2\pi R = 8\pi \Rightarrow 2R = 8 \Rightarrow R = 4$$

حال مساحت قطعه رنگی برابر است با:

$$S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\text{مثلث}} = \frac{\alpha}{360^\circ} (\pi R^2) - (\frac{1}{2} \times r^2 \times \sin \theta) = \frac{30^\circ}{360^\circ} (\pi \times 4^2) - (\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 30^\circ) = \frac{4}{3} \pi - 4 = 4(\frac{\pi}{3} - 1)$$

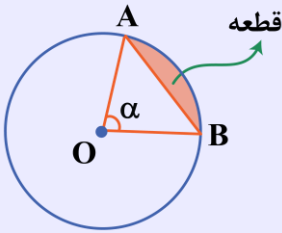
 مساحت قطعه و قطاع

قطاع: قسمتی از مساحت دایره که محدود به دو شعاع و محیط دایره است.

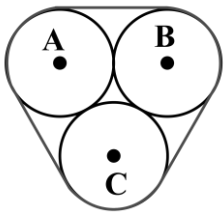


$$S_{\text{قطاع}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi R^2$$

قطعه: قسمتی از مساحت دایره که محدود به وتر و کمان محدود به آن است.



$$S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\text{مثلث}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi R^2 - \frac{1}{2} \sin \alpha R^2$$



۲۰- سه دایره به شعاع ۲ که دوه‌دو بر هم مماس هستند، با یک نخ به هم بسته شده‌اند. طول نخ کدام است؟

(۱) $4(\pi + 2)$

(۲) $4(\pi + 3)$

(۳) $3(\pi + 4)$

(۴) $3(\pi + 2)$

(متوسط - خط به خط - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۲۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم طول نخ که در یک ردیف بسته دور تعدادی دایره هم‌اندازه به شعاع r کشیده شده از رابطه زیر به دست می‌آید:

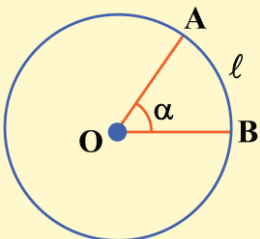
$$L = 2\pi r + 2nr = (\text{محیط چندضلعی حاصل از اتصال مراکز}) + (\text{محیط یک دایره کامل})$$

که در این رابطه، n تعداد دایره‌ها می‌باشد، بنابراین:

$$L = 2\pi r + 2nr \xrightarrow[r=2]{n=3} L = 2\pi(2) + (2 \times 3 \times 2) = 4\pi + 12 = 4(\pi + 3)$$

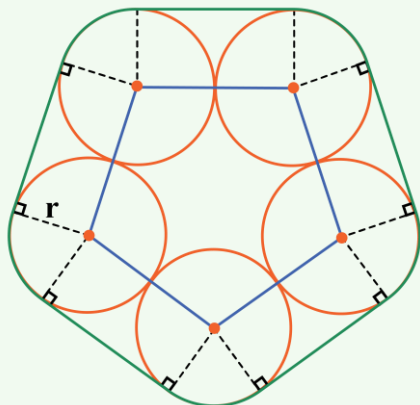
 طول کمان

در شکل مقابل اگر α زاویه‌ای برحسب درجه باشد، طول کمان $\widehat{AB}$ برابر است با:



$$l = \frac{\alpha}{360^\circ} \times 2\pi R$$

اگر نخ دور تعدادی دایره که در یک ردیف بسته به طور متوالی دوبره دو به یکدیگر مماس هستند بسته شده باشد، طول نخ از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$L = 2\pi r + 2nr = (\text{محیط یک دایره کامل}) + (\text{محیط چندضلعی حاصل از اتصال مراکز})$$





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QR Code بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید!

فیزیک ۲: الکتریسیته ساکن

(از ابتدای میدان الکتریکی حاصل از یک ذره باردار تا ابتدای میدان الکتریکی در داخل رساناها)

صفحه‌های ۱۲ تا ۲۷

بودجه‌بندی
این آزمون

سهم در
کنکور

درمجموع ۲ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

۲۱- بزرگی میدان الکتریکی حاصل از ذره‌ای با بار q ، با اندازه بار ذره نسبت و با مربع فاصله از ذره، رابطه دارد.

(۱) وارون - وارون (۲) وارون - مستقیم (۳) مستقیم - مستقیم (۴) مستقیم - وارون

(آسان - خط به خط - سریع - صفحه ۱۲ - ۱۱)

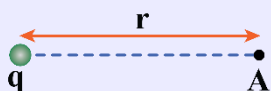
پاسخ: گزینه ۴

طبق رابطه $E = k \frac{|q|}{r^2}$ ، بزرگی میدان الکتریکی حاصل از یک ذره باردار، با اندازه بار q ، نسبت مستقیم و با مربع فاصله از آن، نسبت وارون دارد.

میدان الکتریکی حاصل از یک ذره باردار

۱- برای محاسبه بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q در فاصله r از آن از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$E_A = k \frac{|q|}{r^2}$$



۲- جهت میدان الکتریکی حاصل از بار مثبت به صورت خارج شونده و جهت میدان الکتریکی حاصل از بار منفی به صورت داخل شونده است. به شکل‌های زیر دقت کنید:



تذکر

دقت کنید که در محاسبه اندازه میدان الکتریکی فقط اندازه بار را در رابطه فوق قرار می‌دهیم و علامت بار را در محاسبه در نظر نمی‌گیریم.

نکته

۱- اندازه میدان الکتریکی حاصل از یک ذره باردار، با اندازه آن بار، رابطه مستقیم دارد.

۲- اندازه میدان الکتریکی حاصل از یک ذره باردار با مربع فاصله از آن ذره، رابطه عکس دارد.



۲۲- بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار $q = 1 \mu C$ در فاصله r از آن برابر E است. اگر بخواهیم در فاصله $3r$ از این ذره، بزرگی میدان الکتریکی حاصل از این ذره برابر با $\frac{E}{5}$ باشد، باید کدامیک از عبارت‌های زیر انجام شود؟ ($e = 1.6 \times 10^{-19} C$)

الف: باید به تعداد 5×10^{12} الکترون از ذره خارج کنیم.

ب: باید به تعداد 5×10^{12} الکترون به ذره بدهیم.

ج: باید به تعداد $1/75 \times 10^{13}$ الکترون به ذره بدهیم.

د: باید به تعداد $1/75 \times 10^{13}$ الکترون از ذره خارج کنیم.

(۱) «الف» یا «ب» (۲) «الف» یا «ج» (۳) «ب» یا «د» (۴) «ج» یا «د»

طبق رابطه بزرگی میدان الکتریکی حاصل از یک ذره باردار ($E = k \frac{|q|}{r^2}$)، داریم:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{|q_2|}{|q_1|} \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \xrightarrow{E_1=E, E_2=\frac{E}{5}, |q_1|=1\mu C, r_1=r, r_2=3r} \frac{1}{5} = \frac{|q_2|}{1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow |q_2| = \frac{9}{5}\mu C \Rightarrow \begin{cases} q_2 = +\frac{9}{5}\mu C \\ q_2 = -\frac{9}{5}\mu C \end{cases}$$

اگر $q_2 = +\frac{9}{5}\mu C$ باشد، داریم:

$$\Delta q = q_2 - q_1 = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}\mu C = \frac{4}{5} \times 10^{-6} C \xrightarrow{\Delta q = ne} \frac{4}{5} \times 10^{-6} = n \times 1.6 \times 10^{-19} \Rightarrow n = 5 \times 10^{12}$$

پس باید به تعداد 5×10^{12} الکترون از این ذره خارج کنیم.

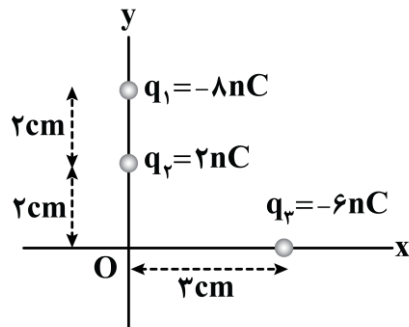
اگر $q_2 = -\frac{9}{5}\mu C$ باشد، داریم:

$$\Delta q = q_2 - q_1 = -\frac{9}{5} - 1 = -\frac{14}{5}\mu C = -\frac{14}{5} \times 10^{-6} C \xrightarrow{\Delta q = -ne} -\frac{14}{5} \times 10^{-6} = -n \times 1.6 \times 10^{-19} \Rightarrow n = 1.75 \times 10^{13}$$

پس باید به تعداد 1.75×10^{13} الکترون به ذره بدهیم.



۲۳- شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 ، q_2 و q_3 را در صفحه xoy نشان می‌دهد. اندازه میدان الکتریکی خالص حاصل از این سه



بار در نقطه O (مبدأ مختصات)، چند واحد SI است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$)

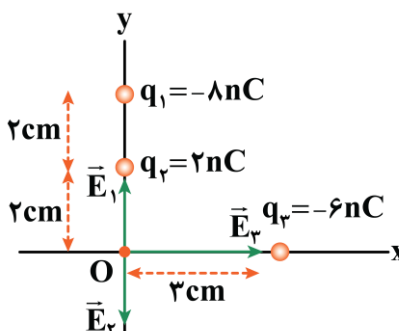
(۱) $3\sqrt{13} \times 10^4$

(۲) 6×10^4

(۳) $3\sqrt{13} \times 10^7$

(۴) 6×10^7

ابتدا اندازه و جهت میدان الکتریکی هر یک از بارها را به دست می‌آوریم:



$$E_1 = k \frac{|q_1|}{r_1^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 8 \times 10^{-9}}{16 \times 10^{-4}} = 4.5 \times 10^4 \frac{N}{C}$$

$$E_2 = k \frac{|q_2|}{r_2^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-9}}{4 \times 10^{-4}} = 4.5 \times 10^4 \frac{N}{C}$$

$$E_3 = k \frac{|q_3|}{r_3^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 6 \times 10^{-9}}{9 \times 10^{-4}} = 6 \times 10^4 \frac{N}{C}$$

میدان‌های $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ هم‌اندازه و در خلاف جهت هم هستند، بنابراین خنثی می‌شوند و داریم:

$$E_t = E_3 = 6 \times 10^4 \frac{N}{C}$$

برهم‌نهی میدان‌های الکتریکی در یک نقطه

اگر به جای یک ذره باردار، تعدادی بار نقطه‌ای داشته باشیم و بخواهیم میدان الکتریکی برابند را در نقطه‌ای از فضا به‌دست آوریم باید برابند برداری میدان‌های الکتریکی ناشی از تک‌تک بارها را در نقطه موردنظر به‌دست آوریم.
پس در سؤالاتی که چند بار الکتریکی وجود دارد و میدان الکتریکی برابند ناشی از آن‌ها را می‌خواهیم در نقطه‌ای از فضا به‌دست آوریم، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: بردار میدان الکتریکی ناشی از هر یک از بارها را در نقطه موردنظر رسم می‌کنیم.

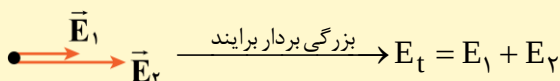
گام دوم: بزرگی میدان الکتریکی ناشی از هر یک از بارها را به‌صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم.

گام سوم: بردارهای به‌دست آمده را به‌صورت برداری جمع می‌کنیم. اگر بردارها هم‌جهت باشند، اندازه آن‌ها جمع می‌شود، اگر خلاف جهت هم باشند، اندازه آن‌ها از هم کم می‌شود و اگر عمود بر هم باشند با کمک رابطه فیثاغورس برابند آن‌ها محاسبه می‌شود.

زنگ ریاضیات

برابند دو بردار $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

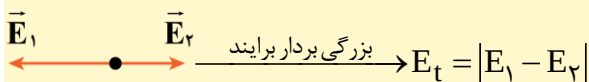
۱- اگر دو بردار $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ هم‌جهت باشند:



$$\vec{E}_1 \rightarrow \vec{E}_2 \xrightarrow{\text{بزرگی بردار برابند}} E_t = E_1 + E_2$$

در این حالت، $\vec{E}_t$ در جهت بردارهای $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ است.

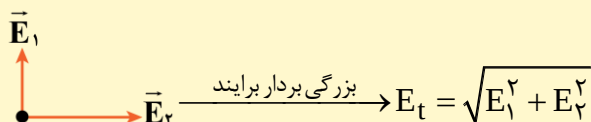
۲- اگر دو بردار $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ در خلاف جهت هم باشند:



$$\vec{E}_1 \leftarrow \vec{E}_2 \xrightarrow{\text{بزرگی بردار برابند}} E_t = |E_1 - E_2|$$

در این حالت، $\vec{E}_t$ هم‌جهت با بردار بزرگ‌تر می‌شود.

۳- اگر دو بردار $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ بر هم عمود باشند:

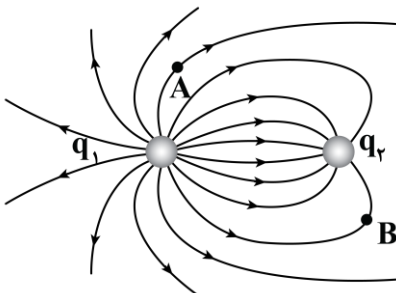


$$\vec{E}_1 \uparrow \vec{E}_2 \xrightarrow{\text{بزرگی بردار برابند}} E_t = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

بچه‌ها در این حالت، اعداد فیثاغورسی ۳n، ۴n و ۵n می‌توانند در خیلی از سؤالات سرعت محاسبات شما را بالا ببرند.



۲۴- خطوط میدان الکتریکی برای دو بار الکتریکی نقطه‌ای در شکل زیر نشان داده شده است. چه تعداد از عبارت‌های زیر با توجه به



شکل، نادرست است؟

الف: بارهای q_1 و q_2 همانم هستند.

ب: $|q_1| < |q_2|$ است.

ج: بردار میدان الکتریکی در نقطه A در جهت $\swarrow$ است.

د: اگر ذره‌ای با بار منفی را در نقطه B قرار دهیم، نیروی الکتریکی

وارد بر آن در جهت $\nearrow$ می‌شود.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

تمام عبارات‌های مطرح شده، نادرست هستند.

بررسی موارد:

(الف)

خطوط میدان الکتریکی از بار q_1 خارج شده و به بار q_2 وارد شده‌اند. بنابراین $q_1 > 0$ و $q_2 < 0$ است، پس بارهای q_1 و q_2 ناهمنام هستند.

(ب)

تراکم خطوط میدان الکتریکی در اطراف بار q_1 ، بیشتر از تراکم خطوط میدان الکتریکی در اطراف بار q_2 است، بنابراین $|q_1| > |q_2|$ است.

(ج)

می‌دانیم در هر نقطه، بردار میدان الکتریکی باید مماس بر خط میدان الکتریکی عبوری از آن نقطه و در همان جهت باشد، پس بردار میدان الکتریکی در نقطه A در جهت ↗ است.

(د)

می‌دانیم بر بارهای منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی، نیروی الکتریکی وارد می‌شود. با توجه به این که جهت میدان در نقطه B در جهت ↗ است، پس نیروی الکتریکی وارد شده بر بار منفی در نقطه B در جهت ↙ خواهد بود.

خطوط میدان الکتریکی

۱- برای مجسم کردن میدان الکتریکی در فضای اطراف اجسام باردار از خطوط میدان الکتریکی استفاده می‌کنیم. این خطوط ویژگی‌های زیر را دارا می‌باشند:

(الف) از بار مثبت خارج می‌شوند و به بار منفی وارد می‌شوند.

(ب) بردار میدان الکتریکی در هر نقطه هم‌جهت با خط مماس بر خطوط میدان الکتریکی در آن نقطه است.

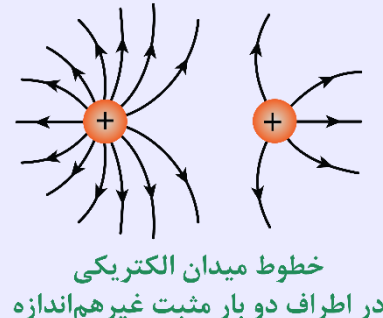
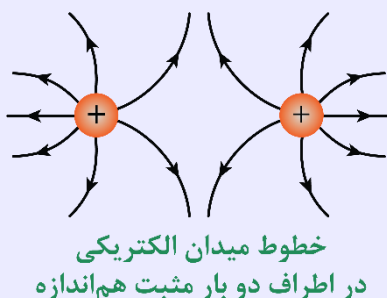
(ج) هرچه تراکم خطوط میدان الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا بیشتر باشد، اندازه میدان الکتریکی در آن ناحیه بزرگ‌تر است.

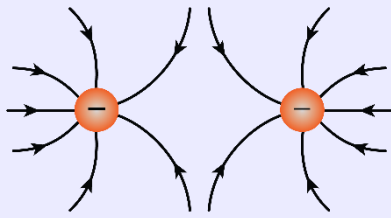
(د) خطوط میدان الکتریکی یکدیگر را قطع نمی‌کنند و از هر نقطه از فضا فقط یک خط میدان عبور می‌کند.

۲- خطوط میدان الکتریکی در اطراف یک ذره باردار منزوی مطابق شکل‌های زیر است:

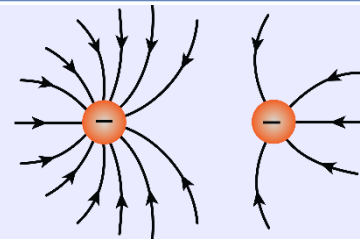


۳- خطوط میدان الکتریکی در اطراف دو ذره باردار مطابق شکل‌های زیر است:

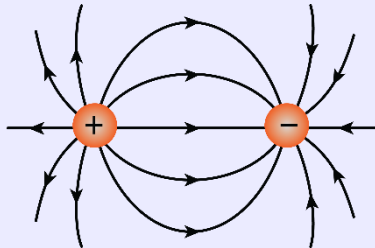




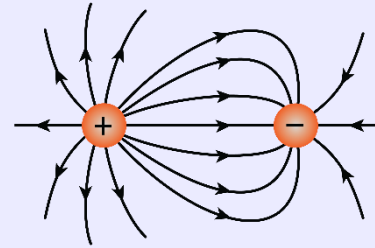
خطوط میدان الکتریکی
در اطراف دو بار منفی هم‌اندازه



خطوط میدان الکتریکی
در اطراف دو بار منفی غیرهم‌اندازه

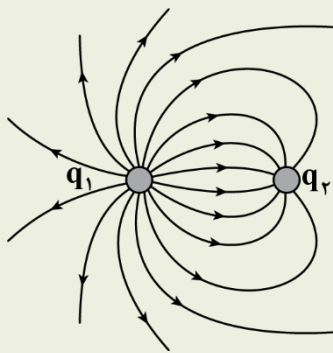


خطوط میدان بارهای
مثبت و منفی هم‌اندازه



خطوط میدان بارهای
مثبت و منفی غیرهم‌اندازه

آزمون سراسری ریاضی اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۴



۴۲- در شکل زیر، با توجه به خطوط میدان الکتریکی، کدام رابطه‌ها در مورد بارهای الکتریکی درست است؟

(۱) $|q_2| < |q_1|$, $q_1 < 0$

(۲) $|q_1| < |q_2|$, $q_1 < 0$

(۳) $|q_2| < |q_1|$, $q_2 < 0$

(۴) $|q_1| < |q_2|$, $q_2 < 0$

پاسخ تشریحی:

جهت خطوط میدان الکتریکی از بار مثبت به سمت بار منفی است. در نتیجه با توجه به شکل خطوط میدان، بار q_1 مثبت ($q_1 > 0$) و بار q_2 منفی ($q_2 < 0$) است. همچنین تراکم خطوط میدان در اطراف بار q_1 بیشتر است، در نتیجه اندازه بار q_1 از اندازه بار q_2 بزرگ‌تر است. ($|q_2| < |q_1|$)

پاسخ: گزینه ۳



نکته

جهت نیروی الکتریکی وارد بر ذره باردار از طرف میدان الکتریکی به صورت زیر تعیین می‌شود:

۱- اگر $q > 0$ باشد، $\vec{E}$ و $\vec{F}$ هم جهت هستند؛ بنابراین به بار مثبت در جهت میدان الکتریکی، نیرو وارد می‌شود.

۲- اگر $q < 0$ باشد، $\vec{E}$ و $\vec{F}$ در خلاف جهت هم هستند؛ بنابراین به بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی، نیرو وارد می‌شود.



۲۵- روی سطح بادکنکی به جرم 20g ، بار الکتریکی $+5\mu\text{C}$ ایجاد می‌کنیم و آن را در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ قرار می‌دهیم. اگر اندازه نیروی شناوری رو به بالای وارد بر بادکنک برابر با 0.5N باشد، میدان الکتریکی $\vec{E}$ چند نیوتون بر کولن و در چه جهتی باشد تا بادکنک معلق بماند؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

(۲) 3×10^7 و قائم رو به بالا

(۴) 3×10^5 و قائم رو به پایین

(۱) 3×10^5 و قائم رو به بالا

(۳) 3×10^7 و قائم رو به پایین

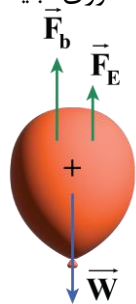
گام اول

سه نیرو به بادکنک وارد می‌شوند، نیروی الکتریکی، نیروی وزن و نیروی شناوری. ابتدا اندازه نیروی وزن را به دست می‌آوریم تا دید خوبی نسبت به جهت و اندازه نیروی الکتریکی داشته باشیم:

$$W = mg \xrightarrow{m=20g=0.02kg, g=10\frac{m}{s^2}} W = 0.02 \times 10 = 0.2N$$

گام دوم

بادکنک، معلق است، یعنی برابری نیروهای وارد بر بادکنک، صفر است، بنابراین با توجه به اندازه نیروی وزن و اندازه نیروی شناوری، باید جهت نیروی الکتریکی وارد بر بادکنک به سمت بالا باشد:



$$\text{شرط تعادل: } F_E + F_b = W \Rightarrow F_E + 0.5 = 0.2 \Rightarrow F_E = 0.15N$$

$$F_E = E|q| \Rightarrow 0.15 = E \times 5 \times 10^{-7} \Rightarrow E = 3 \times 10^5 \frac{N}{C}$$

گام آخر

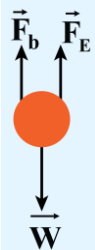
می‌دانیم بر بارهای مثبت در جهت میدان الکتریکی، نیروی الکتریکی وارد می‌شود، پس حالا که $\vec{F}_E$ در راستای قائم و رو به بالا و بار ذره، مثبت است، پس باید میدان الکتریکی هم در راستای قائم و رو به بالا باشد.

راهنمای ز رنگ بازی

برای حل این مسئله باید به سه نیروی وارد شده به جسم توجه کنیم: ۱- نیروی وزن ۲- نیروی الکتریکی ۳- نیروی شناوری
دو حالت زیر ممکن است رخ دهد:

الف) نیروی شناوری کوچک‌تر از وزن باشد:

در این حالت نیروی الکتریکی باید به سمت بالا به جسم وارد شود تا بتواند آن را معلق نگه دارد.



در این حالت اگر بار جسم، مثبت باشد، میدان الکتریکی، هم‌جهت با نیروی الکتریکی و به سمت بالا خواهد بود و اگر بار جسم، منفی باشد، میدان الکتریکی به سمت پایین خواهد بود.

ب) نیروی شناوری بزرگ‌تر از وزن باشد:

در این حالت نیروی الکتریکی باید به سمت پایین به جسم وارد شود تا بتواند آن را معلق نگه دارد.

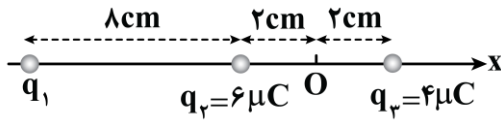


در این حالت اگر بار جسم، مثبت باشد، میدان الکتریکی، هم‌جهت با نیروی الکتریکی و به سمت پایین خواهد بود و اگر بار جسم، منفی باشد، میدان الکتریکی به سمت بالا خواهد بود.



۲۶- مطابق شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای بر روی محور x ثابت شده‌اند. بار q_1 چند میکروکولن باشد تا بردار میدان الکتریکی

خالص حاصل از این بارها در نقطه O برابر با $\vec{i} \left(\frac{N}{C} \times 10^7 + 3 \right)$ باشد؟ $\left(k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \right)$



(۴) -۱۲

(۳) -۱۰

(۲) ۱۰

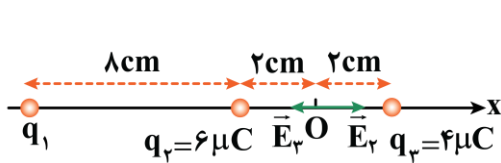
(۱) ۱۲

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - صفحه ۱۴ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

کام‌اول

ابتدا اندازه و جهت میدان الکتریکی حاصل از بارهای q_2 و q_3 را در نقطه O به دست می‌آوریم:



$$E_2 = k \frac{|q_2|}{r_2^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 6 \times 10^{-6}}{(2 \times 10^{-2})^2} = 13.5 \times 10^7 \frac{N}{C}$$

$$E_3 = k \frac{|q_3|}{r_3^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-6}}{(2 \times 10^{-2})^2} = 9 \times 10^7 \frac{N}{C}$$

$\vec{E}_2$ و $\vec{E}_3$ در خلاف جهت هم هستند و $E_2 > E_3$ است، بنابراین برای این دو میدان در جهت $\vec{E}_2$ است و اندازه آن برابر است با:

$$E_{2,3} = E_2 - E_3 = 13.5 \times 10^7 - 9 \times 10^7 = 4.5 \times 10^7 \frac{N}{C} \Rightarrow \vec{E}_{2,3} = (4.5 \times 10^7 \frac{N}{C}) \vec{i}$$

کام‌آخر

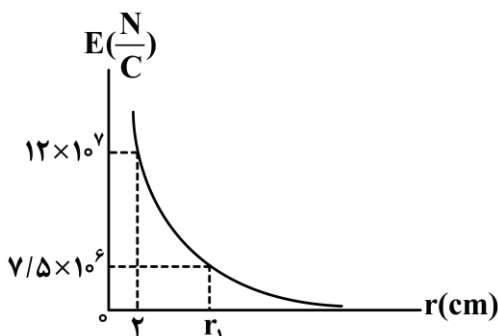
با توجه به این که $\vec{E}_{2,3}$ در جهت $\vec{E}_t$ بوده و $E_{2,3} > E_t$ است، پس باید $\vec{E}_1$ در خلاف جهت محور x باشد؛ یعنی باید $q_1 < 0$ باشد و داریم:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_{2,3} = \vec{E}_t \Rightarrow \vec{E}_1 + (4.5 \times 10^7 \frac{N}{C}) \vec{i} = (3.6 \times 10^7 \frac{N}{C}) \vec{i} \Rightarrow \vec{E}_1 = (-0.9 \times 10^7 \frac{N}{C}) \vec{i}$$

$$\Rightarrow E_1 = 0.9 \times 10^7 \frac{N}{C} \xrightarrow{E_1 = k \frac{|q_1|}{r_1^2}} 0.9 \times 10^7 = \frac{9 \times 10^9 \times |q_1|}{(10 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow |q_1| = 10^{-5} C = 10 \mu C \Rightarrow q_1 = -10 \mu C$$

•• ایلو ••

۲۷- نمودار تغییرات اندازه میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی نقطه‌ای q بر حسب فاصله از آن، مطابق شکل زیر است. r_1 چند



سانتی متر است؟ $\left(k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \right)$

(۱) ۱۲

(۲) ۱۰

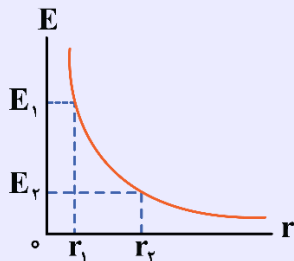
(۳) ۸

(۴) ۶

به کمک رابطه بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q ($E = k \frac{|q|}{r^2}$) و با توجه به ثابت بودن اندازه بار داریم:

$$\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \xrightarrow{E_2 = 12 \times 10^7 \frac{N}{C}, E_1 = 7/5 \times 10^6 \frac{N}{C}, r_2 = 2 \text{ cm}} \frac{12 \times 10^7}{7/5 \times 10^6} = \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 \Rightarrow 16 = \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 \Rightarrow 4 = \frac{r_1}{2} \Rightarrow r_1 = 8 \text{ cm}$$

نمودار بزرگی میدان الکتریکی حاصل از یک بار الکتریکی نقطه‌ای بر حسب فاصله از آن



نمودار تغییرات بزرگی میدان الکتریکی بر حسب فاصله از بار، مطابق شکل مقابل است: همان طور که واضح است با افزایش فاصله از بار، بزرگی میدان کاهش می‌یابد.

$$E = \frac{k|q|}{r^2} \xrightarrow{k|q| \text{ ثابت است}} E \propto \frac{1}{r^2}$$

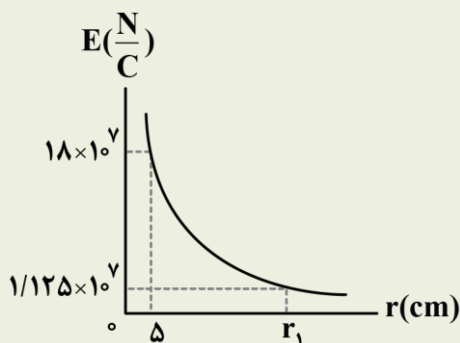


اگر بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q در فاصله r_1 برابر با E_1 و در فاصله r_2 برابر با E_2 باشد، داریم:

$$\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

آزمون سراسری ریاضی خارج از کشور ۱۳۹۹

۵۹- نمودار تغییرات میدان الکتریکی حاصل از بار نقطه‌ای q بر حسب فاصله از آن به صورت شکل زیر است. اندازه q چند میکروکولن و r_1



چند سانتی‌متر است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$)

(۱) ۱۰، ۵۰

(۲) ۲۰، ۵۰

(۳) ۱۰، ۲۵

(۴) ۲۰، ۲۵

پاسخ تشریحی:

با توجه به نمودار داده شده داریم:

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{18 \times 10^7}{1/125 \times 10^7} = \left(\frac{r_1}{5}\right)^2 \Rightarrow r_1 = 20 \text{ cm}$$

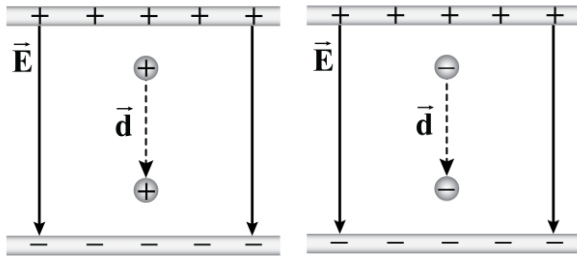
و بار الکتریکی برابر است با:

$$E = \frac{k|q|}{r^2} \Rightarrow 18 \times 10^7 = \frac{9 \times 10^9 \times |q|}{(5 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow |q| = 50 \times 10^{-6} \text{ C} = 50 \mu\text{C}$$

پاسخ: گزینه ۲



۲۸- با توجه به شکل‌های زیر که در هر یک از آن‌ها ذره باردار درون میدان الکتریکی یکنواخت بین صفحات جابه‌جا می‌شود،



شکل (۱)

شکل (۲)

کدام‌یک از عبارات‌های زیر با توجه به جهت جابه‌جایی ذره، درست است؟
الف: در هر دو شکل، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد.
ب: در شکل (۱) کار نیروی الکتریکی (W_E)، مثبت است.
ج: در شکل (۲)، انرژی پتانسیل الکتریکی (U_E) کاهش می‌یابد.

(۴) فقط «ب»

(۳) «ب» و «ج»

(۲) فقط «ج»

(۱) «الف» و «ب»

(متوسط - مفهومی - سریع) (صفحه ۲۲ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

عبارات‌های «الف» و «ب» درست هستند.

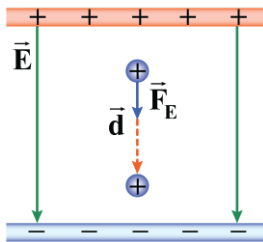
بررسی موارد:



در هر دو شکل، ذره در جهت میدان الکتریکی جابه‌جا شده است و در نتیجه پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد. (✓)



می‌دانیم بر بارهای مثبت در جهت میدان الکتریکی، نیروی الکتریکی وارد می‌شود. بنابراین در شکل (۱)، $\vec{F}_E$ و $\vec{d}$ هم‌جهت بوده ($\theta = 0^\circ$) و طبق رابطه $W_E = E|q|d \cos \theta$ ، کار نیروی الکتریکی، مثبت است. (✓)



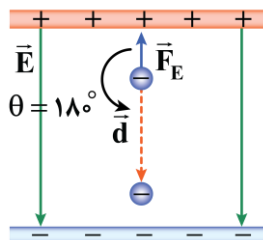
شکل (۱)



چون ذره با بار مثبت، در جهت تمایل خودبه‌خودی (در جهت میدان) جابه‌جا شده، پس $W_E > 0$ است.



می‌دانیم بر بارهای منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی، نیروی الکتریکی وارد می‌شود. بنابراین در شکل (۲)، $\vec{F}_E$ و $\vec{d}$ در خلاف جهت هم هستند ($\theta = 180^\circ$) و طبق رابطه $\Delta U_E = -E|q|d \cos \theta$ ، انرژی پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد ($\Delta U_E > 0$). (✗)



شکل (۲)



چون ذره با بار منفی در خلاف جهت تمایل خودبه‌خودی (در جهت میدان) جابه‌جا شده، پس انرژی پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد ($\Delta U_E > 0$).

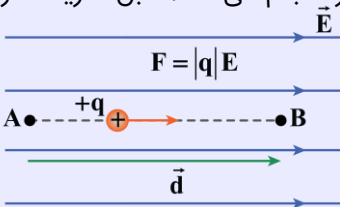
کار نیروی الکتریکی

کار نیروی الکتریکی وارد بر یک ذره باردار در میدان الکتریکی $\vec{E}$ در یک جابه‌جایی مشخص، برابر با قرینه تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی در همان جابه‌جایی است.

$$W_E = -\Delta U_E$$

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی یک ذره باردار در میدان الکتریکی یکنواخت

فرض کنید ذره باردار $+q$ در یک میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ تحت اثر میدان الکتریکی، جابه‌جایی $\vec{d}$ را انجام می‌دهد. طبق تعریف کار یک نیرو، خواهیم داشت:



$$W_E = F_E d \cos \theta = |q| E d \cos \theta$$

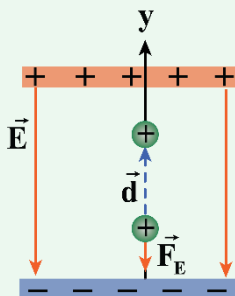
$$\Delta U_E = -W_E = -|q| E d \cos \theta$$

θ زاویه بین نیروی الکتریکی $\vec{F}_E$ و جابه‌جایی $\vec{d}$ است.

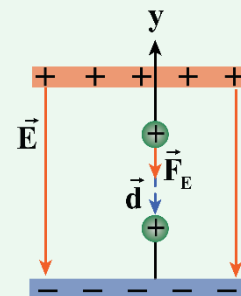
نکات

- ۱- به‌سادگی می‌توان دریافت، اگر بار الکتریکی مثبت، در جهت میدان الکتریکی جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش یافته است و اگر بار الکتریکی منفی، در جهت میدان الکتریکی جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد.
- ۲- اگر یک بار الکتریکی را در یک میدان الکتریکی رها کنیم، همواره به سمتی می‌رود که انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد و اگر برای جابه‌جایی آن مجبور باشیم به‌زور این کار را انجام دهیم، انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد.

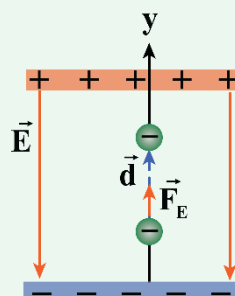
در شکل‌های زیر، چند حالت مربوط به جابه‌جایی بارهای مختلف و تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی نشان داده شده است.



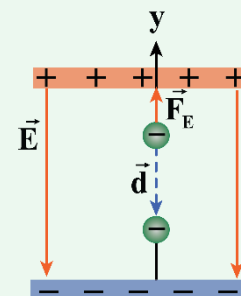
(ب) بار مثبت در خلاف جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ حرکت می‌کند: میدان الکتریکی، کار منفی W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E افزایش می‌یابد.



(الف) بار مثبت در جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ حرکت می‌کند: میدان الکتریکی، کار مثبت W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E کاهش می‌یابد.



(د) بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ حرکت می‌کند: میدان الکتریکی، کار مثبت W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E کاهش می‌یابد.



(ج) بار منفی در جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ حرکت می‌کند: میدان الکتریکی، کار منفی W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E افزایش می‌یابد.

در مسیرهای غیرمستقیم حرکت ذره باردار در درون میدان الکتریکی یکنواخت، اگر $d_{||}$ ، اندازه مؤلفه‌ای از جابه‌جایی باشد که در راستای میدان الکتریکی است، آن‌گاه داریم:

$$\Delta U_E = \pm E|q|d_{||}$$

علامت **مثبت** ← بار مثبت در خلاف جهت میدان الکتریکی یا بار منفی در جهت میدان الکتریکی، جابه‌جایی $d_{||}$ داشته باشد.

علامت **منفی** ← بار مثبت در جهت میدان الکتریکی یا بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی، جابه‌جایی $d_{||}$ داشته باشد.

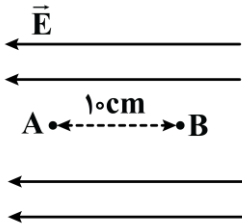


۱- در حرکت **خودبه‌خودی** بار (بار مثبت در جهت میدان الکتریکی و یا بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی جابه‌جا شود)، انرژی پتانسیل الکتریکی، **کاهش** می‌یابد. ($\Delta U_E < 0$)

۲- در حرکت **غیر خودبه‌خودی** بار (بار مثبت در خلاف جهت میدان الکتریکی و بار منفی در جهت میدان الکتریکی جابه‌جا شود)، انرژی پتانسیل الکتریکی، **افزایش** می‌یابد. ($\Delta U_E > 0$)



۲۹- مطابق شکل زیر، ذره‌ای با بار الکتریکی $q = -2\mu C$ در خلاف جهت میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ به بزرگی $200 \frac{N}{C}$ به اندازه 10cm از نقطه A تا نقطه B جابه‌جا می‌شود. تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی برحسب میکروژول و مقدار $V_B - V_A$ برحسب ولت، به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه به‌درستی آمده‌اند؟

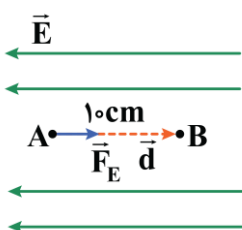


- (۱) $+40$ و -20
- (۲) $+40$ و $+20$
- (۳) -40 و -20
- (۴) -40 و $+20$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۲۳ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

گام اول



می‌دانیم بر بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی، نیروی الکتریکی وارد می‌شود، بنابراین مطابق شکل زیر داریم:

$$\Delta U_E = -E|q|d \cos \theta$$

$E = 200 \frac{N}{C}, |q| = 2\mu C = 2 \times 10^{-6} C$
 $d = 10\text{cm} = 0.1\text{m}, \theta = 0^\circ$

$$\Delta U_E = -200 \times 2 \times 10^{-6} \times 0.1 \times \cos 0^\circ = -4 \times 10^{-5} \text{J} = -40 \mu\text{J}$$

گام آخر

حالا که تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی را به‌دست آورده‌ایم، به‌راحتی می‌توانیم اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه A و B را به‌دست آوریم:

$$\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q} \Rightarrow V_B - V_A = \frac{-4 \times 10^{-5}}{-2 \times 10^{-6}} = 20\text{V}$$

پتانسیل الکتریکی

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی یک ذره باردار به بار الکتریکی آن ذره بستگی دارد؛ مثلاً با دو برابر شدن بار ذره، تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی آن نیز دو برابر می‌شود.

بنابراین، نسبت تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی به بار ذره، مستقل از نوع و اندازه بار الکتریکی است. به این نسبت، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو نقطه‌ای می‌گوییم که ذره میان آن‌ها جابه‌جا شده است و آن را با ΔV نمایش می‌دهیم:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{\Delta U_E}{q}$$

که در آن V کمیتی نرده‌ای موسوم به پتانسیل الکتریکی است که مقدار آن در نقطه‌های ۱ و ۲ به ترتیب V_1 و V_2 است. در این رابطه، **اختلاف پتانسیل الکتریکی (ΔV) بر حسب ژول بر کولن ($\frac{J}{C}$) است که آن را ولت می‌نامند** و با نماد V نمایش می‌دهند.

تذکر

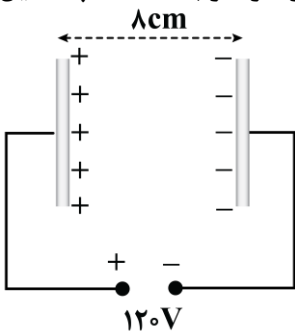
در این رابطه، باید حتماً علامت q در نظر گرفته شود.

نکات

- ۱- عامل شارش بار الکتریکی بین دو نقطه یا دو جسم، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه یا دو جسم است.
- ۲- اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه، به **اندازه و نوع بار جابه‌جا شده بین آن دو نقطه بستگی ندارد** (یعنی هیچ ربطی به بار q ندارد)!
- ۳- اگر در **جهت** میدان الکتریکی حرکت کنیم، پتانسیل الکتریکی **کاهش** می‌یابد ($\Delta V < 0$)، اگر در **خلاف جهت** میدان الکتریکی حرکت کنیم، پتانسیل الکتریکی **افزایش** می‌یابد ($\Delta V > 0$) و اگر **عمود** بر خطوط میدان الکتریکی حرکت کنیم، پتانسیل الکتریکی **ثابت** می‌ماند ($\Delta V = 0$).
- ۴- بار مثبت تمایل دارد از پتانسیل الکتریکی بیشتر به پتانسیل الکتریکی کمتر برود و به بار منفی تمایل دارد از پتانسیل الکتریکی کمتر به پتانسیل الکتریکی بیشتر برود.



۳۰- در شکل زیر، اندازه میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه رسانا که در فاصله 8 cm از یکدیگر قرار دارند و به اختلاف پتانسیل الکتریکی ثابت 120 V متصل شده‌اند، چند ولت بر متر است؟



- (۱) $1/5$
- (۲) 15
- (۳) 150
- (۴) 1500

(آسان - محاسباتی - سریع - صفحه ۲۶ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

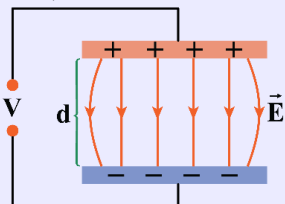
اندازه میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه رسانا برابر است با:

$$E = \frac{|\Delta V|}{d} = \frac{120}{8 \times 10^{-2}} = 1500 \frac{V}{m}$$

میدان الکتریکی یکنواخت

۱- اگر دو صفحه بزرگ رسانا را با بارهای $+Q$ و $-Q$ باردار کنیم و در مقابل هم در فاصله d قرار دهیم، به دور از لبه صفحه‌ها، میدان الکتریکی یکنواختی بین آن‌ها ایجاد می‌شود که اندازه آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E = \frac{V}{d}$$



۲- مطابق رابطه $E = \frac{V}{d}$ ، یکای میدان الکتریکی علاوه بر نیوتون که در گذشته خواندیم، می‌تواند $\frac{\text{ولت}}{\text{متر}}$ هم باشد.



$$\frac{\Delta V_{AB}}{\Delta V_{CD}} = \frac{d_{AB}}{d_{CD}}$$

در یک میدان الکتریکی یکنواخت اگر فاصله دو نقطه در راستای خطوط میدان d باشد، داریم:



برای محاسبه مستقیم ΔV می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم که در آن E اندازه میدان الکتریکی برحسب $\frac{N}{C}$ و d' اندازه جابه‌جایی در راستای موازی با میدان برحسب m است:

$$\Delta V = \pm Ed'$$

علامت +: اگر $\vec{d}'$ در خلاف جهت خطوط میدان الکتریکی باشد: $\Delta V = +Ed'$

علامت -: اگر $\vec{d}'$ در جهت خطوط میدان الکتریکی باشد: $\Delta V = -Ed'$





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید
پاسخنامه ویدئویی آزمون

قدر هدایای زمینی را بدانیم (از رفتار عنصرها و شعاع اتم تا انتهای باهم ببیندیشیم)
صفحه‌های ۱۰ تا ۲۸

بودجه‌بندی
این آزمون

مباحث این آزمون در مجموع ۲ تست از ۳۰ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور

۳۱- اگر شعاع اتمی عناصر لیتیم، کلسیم و گوگرد را در واحد پیکومتر به ترتیب برابر ۱۵۲، ۱۹۷ و ۱۰۵ فرض کنیم، شعاع اتمی کدام عنصر در واحد پیکومتر قطعاً نادرست است؟

${}_{15}P: 110$ (۴)

${}_{12}Mg: 160$ (۳)

${}_{8}O: 112$ (۲)

${}_{34}Se: 157$ (۱)

(سخت - مفهومی - استاندارد - صفحه ۱۲ - ۱۱۰)

پاسخ: گزینه ۲

اکسیژن و گوگرد هر دو در گروه شانزدهم جدول تناوبی قرار گرفته‌اند و اکسیژن بالاتر از گوگرد قرار گرفته است. بنابراین شعاع اتمی آن باید کمتر از ۱۰۵ پیکومتر باشد. در نتیجه ۱۱۲ برای شعاع اتمی اکسیژن مناسب نیست.

روند اتمی

در یک دوره با حرکت از چپ به راست، تعداد لایه‌های الکترونی ثابت بوده ولی تعداد پروتون‌های هسته افزایش پیدا می‌کند. با افزایش تعداد پروتون‌های موجود در هسته، جاذبه روی لایه‌های الکترونی افزایش پیدا کرده (پس می‌توان گفت قدرت اتم برای جذب الکترون‌ها یعنی خاصیت نافلزی افزایش و قدرت فلزی کاهش پیدا می‌کند.) و شعاع اتم کاهش پیدا می‌کند.

در یک گروه نیز با حرکت از سمت بالا به پایین، تعداد لایه‌های الکترونی افزایش پیدا کرده و شعاع افزایش پیدا می‌کند. با افزایش شعاع اتمی و در نتیجه افزایش فاصله هسته (پروتون‌ها) از لایه آخر الکترونی، اتم راحت‌تر می‌تواند الکترون‌های ظرفیتی خود را از دست بدهد. پس می‌توان گفت در یک گروه از بالا به پایین خاصیت فلزی افزایش و خاصیت نافلزی کاهش پیدا می‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) سلنیم و گوگرد هر دو در گروه شانزدهم قرار داشته و سلنیم پایین‌تر از گوگرد قرار گرفته است؛ بنابراین شعاع اتمی سلنیم از گوگرد (۱۰۵ پیکومتر) بیشتر است. از طرفی سلنیم و کلسیم هردو در دوره چهارم قرار گرفته و سلنیم در سمت راست کلسیم قرار گرفته است. بنابراین شعاع اتمی سلنیم باید کمتر از ۱۹۷ پیکومتر باشد. در نتیجه شعاع اتمی ۱۵۷ پیکومتر برای سلنیم قابل قبول است.

۲) منیزیم همانند کلسیم در گروه دوم قرار داشته و موقعیت آن بالاتر است. بنابراین شعاع اتمی منیزیم باید کمتر از ۱۹۷ پیکومتر باشد. از طرفی منیزیم و گوگرد هر دو در دوره سوم قرار داشته و منیزیم در سمت چپ گوگرد قرار دارد. بنابراین شعاع آن باید بیشتر از ۱۰۵ پیکومتر باشد. در نتیجه شعاع اتمی ۱۶۰ پیکومتر برای آن مناسب است.

۳) فسفر همانند گوگرد در دوره سوم قرار داشته و در سمت چپ آن است. بنابراین شعاع اتمی فسفر باید بزرگ‌تر از ۱۰۵ پیکومتر باشد. در نتیجه شعاع اتمی ۱۱۰ پیکومتر برای آن قابل قبول است.



۳۲- اگر فرمول شیمیایی اکسیدهای تیتانیم به صورت TiO و TiO_2 باشد، مجموع عدد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های موجود در آخرین زیرلایه در یونی از تیتانیم با اندازه بار کوچک‌تر برابر کدام است؟

10 (۴)

24 (۳)

5 (۲)

12 (۱)

(آسان - مفهومی - سریع - صفحه ۱۶ - ۱۱۰)

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به اکسیدهای تیتانیم، می‌توان برداشت کرد که اندازه بار کاتیون آن در ترکیب‌های مختلف می‌تواند ۲+ یا ۴+ باشد. آرایش الکترونی Ti^{2+} به صورت زیر است:



آخرین زیرلایه این یون، $3d$ است. عدد کوانتومی اصلی و فرعی این زیرلایه به ترتیب برابر ۳ و ۲ است. بنابراین مجموع عدد کوانتومی اصلی و فرعی این زیرلایه برابر ۵ است. از طرفی در این زیرلایه ۲ الکترون حضور دارند. بنابراین مجموع عدد کوانتومی اصلی و فرعی برای الکترون‌های موجود در این زیرلایه برابر ۱۰ است.



پرشیدن زیرلایه‌ها تنها به عدد کوانتومی اصلی وابسته نیست؛ بلکه از یک قاعده کلی به نام قاعده آفبا پیروی می‌کند. قاعده آفبا ترتیب پرشدن زیرلایه‌ها را در اتم‌های گوناگون نشان می‌دهد. مطابق این قاعده، هنگام افزودن الکترون به زیرلایه‌ها، نخست زیرلایه‌های نزدیک‌تر به هسته پر می‌شوند که دارای انرژی کمتر هستند و سپس لایه‌های بالاتر پر خواهند شد. براساس قاعده آفبا هر چه انرژی یک زیرلایه کمتر باشد، آن زیرلایه زودتر از الکترون پر می‌شود. هر چه یک زیرلایه $n + l$ پایین‌تری داشته باشد، انرژی آن زیرلایه نیز کمتر است. برای مثال زیرلایه $4s$ زودتر از زیرلایه $3d$ شروع به گرفتن الکترون می‌کند. هنگامی که مقدار $n + l$ برای دو زیرلایه برابر باشد، زیرلایه با عدد کوانتومی اصلی کوچک‌تر، انرژی کمتری داشته و زودتر از الکترون پر می‌شود. برای مثال، زیرلایه $3p$ نسبت به زیرلایه $4s$ انرژی کمتری دارد. توجه داریم که برای رسیدن به آرایش الکترونی کاتیون‌ها، ابتدا آرایش الکترونی اتم را مرتب کرده و در انتها به اندازه بار الکتریکی کاتیون از آخرین زیرلایه الکترون برمی‌داریم. اگر اندازه بار الکتریکی از تعداد الکترون‌های زیرلایه آخر بیشتر باشد، باقی الکترون‌ها را از زیرلایه قبلی برمی‌داریم.



۳۲- اگر در یک نمونه ۲۰۰ گرمی از سنگ معدن آهن، ۱۶۰ گرم Fe_2O_3 حضور داشته باشد، درصد جرمی آهن در این سنگ معدن برابر چند درصد است؟ ($O = ۱۶, Fe = ۵۶: g. mol^{-1}$)

۴۹ (۴)

۳۵ (۳)

۴۲ (۲)

۵۶ (۱)

(آسان - مسئله - استاندارد ۱ - صفحه ۲۳ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

آهن پرمصرف‌ترین فلز جهان بوده و در طبیعت به‌طور عمده به‌صورت Fe_2O_3 حضور دارد. برای حل این سؤال ابتدا جرم آهن موجود در این ترکیب یونی را محاسبه می‌کنیم:

$$? g Fe = ۱۶۰ g Fe_2O_3 \times \frac{۱ mol Fe_2O_3}{۱۶۰ g Fe_2O_3} \times \frac{۲ mol Fe}{۱ mol Fe_2O_3} \times \frac{۵۶ g Fe}{۱ mol Fe} = ۱۱۲ g$$

فرمول محاسبه درصد جرمی یک عنصر در یک ماده به‌صورت زیر است:

$$\text{درصد جرمی عنصر} = \frac{\text{جرم عنصر}}{\text{جرم کل}} \times ۱۰۰$$

پس درصد جرمی آهن در این سنگ معدن را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{درصد جرمی} = \frac{۱۱۲ g}{۲۰۰ g} \times ۱۰۰ = ۵۶\%$$

پس درصد جرمی آهن در سنگ معدن آن برابر ۵۶ درصد است.



۳۴- کدام یک از عبارات‌های زیر درست هستند؟

الف - برخی فلزهای اصلی جدول تناوبی به‌صورت آزاد در طبیعت حضور دارند.

ب - کانی منگنز (II) کربنات در طبیعت به رنگ صورتی پررنگ یا قرمز یافت می‌شود.

ج - بازتاب زیاد پرتوهای خورشیدی، مهم‌ترین دلیل کاربرد عنصر طلا در ساخت کلاه فضانوردان است.

د - پرکاربردترین فلز جهان در واکنش با محلول هیدروکلریک‌اسید، رسوب سبزرنگ تشکیل می‌دهد.

(۴) «ب» و «د»

(۳) «الف» و «د»

(۲) «ب» و «ج»

(۱) «الف» و «ج»

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۱ - صفحه ۱۸ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

عبارات‌های (ب) و (ج) درست هستند.

الف) به عناصر فلزی که در دسته‌های s و p جدول تناوبی قرار گرفته‌اند، فلزهای اصلی گفته می‌شود. این فلزها واکنش‌پذیری بالایی داشته و به همین دلیل به‌صورت آزاد در طبیعت حضور ندارد. وجود نمونه‌هایی از نقره، مس، پلاتین و طلا در طبیعت گزارش شده است. توجه داریم که همگی این عناصر، از فلزهای واسطه جدول تناوبی به شمار می‌روند.

پ) منگنز با از دست دادن شماری از الکترون‌های ظرفیت خود و تبدیل شدن به یون‌های Mn^{2+} و Mn^{3+} ، در تشکیل ترکیب‌های یونی شرکت می‌کند. یکی از این ترکیب‌های یونی، منگنز (II) کربنات بوده که در طبیعت به رنگ صورتی پررنگ یا قرمز حضور دارد.

ج) رسانایی الکتریکی بالای طلا و حفظ این رسانایی در شرایط دمایی گوناگون، همچنین واکنش ندادن آن با گازهای موجود در هواکره و مواد موجود در بدن انسان همراه با بازتاب زیاد پرتوهای خورشیدی از جمله ویژگی‌های خاص طلا است که سبب شده کاربردهای این فلز گسترش یافته و تقاضای جهانی آن روزبه‌روز افزایش یابد. بازتاب زیاد پرتوهای خورشیدی، دلیل اصلی استفاده از این عنصر در ساخت کلاه فضانوردان است.



طلا فلزی ارزشمند و گران‌بها است که افزون بر ویژگی‌های مشترک فلزها، ویژگی‌های منحصربه‌فردی نیز دارد. فلز طلا به اندازه‌ای چکش‌خوار و نرم است که چند گرم از آن را می‌توان با چکش‌کاری به صفحه‌ای با مساحت چند متر مربع تبدیل کرد. به همین دلیل ساخت برگه‌ها و رشته سیم‌های بسیار نازک (نخ طلا) به راحتی امکان‌پذیر است. رسانایی الکتریکی بالای طلا و حفظ این رسانایی در شرایط دمایی گوناگون، همچنین واکنش ندادن آن با گازهای موجود در هواکره و مواد موجود در بدن انسان همراه با بازتاب زیاد پرتوهای خورشیدی از جمله ویژگی‌های خاص طلاست که سبب شده کاربردهای این فلز گسترش یافته و تقاضای جهانی آن روزبه‌روز افزایش یابد.

د) پرکاربردترین فلز جهان، آهن است. این فلز در واکنش با هیدروکلریک اسید، محلول حاوی $FeCl_2$ را تولید می‌کند. توجه داریم که این ترکیب یونی محلول در آب است.



۳۵- محلولی از آهن (n) کلرید در اختیار داریم. اگر در هر یون آهن موجود در این محلول، ۵ الکترون با $n + l = 5$ وجود داشته باشد، این محلول چه رنگی بوده و با اضافه کردن سدیم هیدروکسید کافی به محلول، در رسوب ایجاد شده به ازای هر یون آهن (n)، چند یون هیدروکسید حضور خواهد داشت؟

۴) سبز - ۲

۳) سبز - ۳

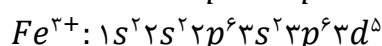
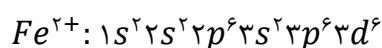
۲) زرد - ۲

۱) زرد - ۳

(آسان - خطبه‌خط - سریع) - صفحه ۱۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

آرایش الکترونی دو یون پایدار آهن به‌صورت زیر است:



همان‌طور که مشخص است، در یون Fe^{3+} ، ۵ الکترون در زیرلایه $3d$ با $n + l = 5$ حضور دارد. پس یون موجود در محلول اولیه، آهن (III) است که محلول‌های آن زردرنگ هستند. (رسوب آن قرمز است)

در واکنش این محلول با محلول سدیم هیدروکسید، رسوب قرمز رنگ آهن (III) هیدروکسید ایجاد خواهد شد که فرمول شیمیایی آن $Fe(OH)_3$ بوده و به ازای هر یون آهن، ۳ یون هیدروکسید حضور دارد.



۳۶- اگر بتوان فلز A را توسط فلز B ، از سنگ معدن آن استخراج کرد، کدامیک از مقایسه‌های زیر درست است؟

۲) سرعت واکنش در هوای مرطوب: $A > B$ ۱) دشواری شرایط نگهداری: $A > B$ ۴) واکنش‌پذیری: اکسید $B > A$ ۳) تمایل به تشکیل کاتیون: $A > B$

اگر یک واکنش به صورت خودبه خودی انجام شود، یعنی واکنش پذیری واکنش دهنده‌ها بیشتر از فراورده‌ها بوده است. برای مثال در این سؤال، می‌توان با استفاده از فلز B ، فلز A را از ترکیب آن جدا کرد؛ بنابراین می‌توان گفت واکنش پذیری فلز B بیشتر از فلز A است. هر چه یک فلز واکنش پذیرتر باشد، ترکیب حاصل از آن پایدارتر بوده و تمایل کمتری به انجام واکنش خواهد داشت. (تائید گزینه ۴)

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) با افزایش واکنش پذیری یک فلز، شرایط نگهداری آن در آزمایشگاه سخت‌تر می‌شود. چرا که آن فلز تمایل بیشتری به انجام واکنش با مواد پیرامون خود دارد.

۲) هر چه واکنش پذیری یک فلز بیشتر باشد، در هوای مرطوب با سرعت بیشتری با اکسیژن واکنش می‌دهد.

۳) اگر یک فلز واکنش پذیری بیشتری داشته باشد، تمایل بیشتری به تشکیل کاتیون دارد.



۳۷- ۹/۶ گرم کربن با مقدار کافی گاز کلر مطابق معادله موازنه نشده $TiO_2(s) + C(s) + Cl_2(g) \rightarrow TiCl_4(s) + CO(g)$ با بازده ۵۰ درصد واکنش می‌دهد. تفاوت جرم فراورده‌های تولیدشده در این واکنش برابر چند گرم خواهد بود؟

($C = ۱۲, O = ۱۶, Cl = ۳۵/۵, Ti = ۴۸: g.mol^{-1}$)

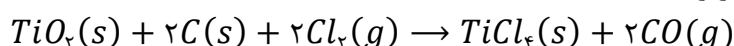
۲۶/۸ (۴)

۵۳/۶ (۳)

۴۳/۲ (۲)

۳۵/۵ (۱)

معادله موازنه شده واکنش به صورت زیر است:



ابتدا مقدار نظری تولیدشده از هریک از فراورده‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$? g TiCl_4 = 9/6 g C \times \frac{1 mol C}{12 g C} \times \frac{1 mol TiCl_4}{2 mol C} \times \frac{190 g TiCl_4}{1 mol TiCl_4} = 76 g$$

$$? g CO = 9/6 g C \times \frac{1 mol C}{12 g C} \times \frac{2 mol CO}{2 mol C} \times \frac{28 g CO}{1 mol CO} = 22/4 g$$

حال با استفاده از بازده این واکنش شیمیایی، مقدار عملی هر فراورده را به دست می‌آوریم:

$$TiCl_4: \text{بازده} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 \Rightarrow 50 = \frac{\text{مقدار عملی}}{76} \times 100 \Rightarrow \text{مقدار عملی} = 38 g$$

$$CO: \text{بازده} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 \Rightarrow 50 = \frac{\text{مقدار عملی}}{22/4} \times 100 \Rightarrow \text{مقدار عملی} = 11/2 g$$

با توجه به محاسبات انجام شده، تفاوت جرم فراورده‌های تولید شده در این واکنش برابر ۲۶/۸ گرم بوده است.

برای محاسبه سریع‌تر می‌توانستیم تفاوت جرم دو فراورده به صورت نظری را حساب کرده و در فرمول بازده واکنش قرار دهیم. مقدار اختلاف جرمی به صورت عملی به دست می‌آمد.

بازده

واکنش‌های شیمیایی همیشه مطابق آنچه انتظار می‌رود پیش نمی‌روند؛ زیرا ممکن است واکنش دهنده‌ها ناخالص باشند یا ممکن است واکنش به طور کامل انجام نشود، حتی گاهی نیز هم‌زمان با آن، واکنش‌های ناخواسته دیگری انجام می‌شوند. با این توصیف، مقدار واقعی فراورده از مقدار مورد انتظار کمتر است. در واقع بازده درصدی واکنش‌های شیمیایی از ۱۰۰ کمتر است. در مسائل مختلف از طریق فرمول زیر می‌توانیم بازده درصدی واکنش را محاسبه کنیم:

$$\text{بازده واکنش} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100$$

توجه داریم برای تبدیل مول یک فراورده به فراورده دیگر و همچنین یک واکنش دهنده به واکنش دهنده دیگر بازده تأثیری نخواهد داشت!



۳۸- کدام یک از عبارت‌های زیر درباره تولید سوخت سبز از گلوکز درست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16: g.mol^{-1}$)

- الف - این واکنش به صورت هوازی و در حضور اکسیژن کافی انجام می‌شود.
 ب - در صورت مصرف یک مول گلوکز، یک مول سوخت سبز تولید می‌شود.
 ج - به تقریب نیمی از جرم گلوکز مصرف شده به یک سوخت سبز تبدیل می‌شود.
 د - واکنش‌دهنده این واکنش از بقایای گیاهانی مانند نیشکر، سیب‌زمینی و ذرت حاصل می‌شود.
- (۱) «الف» و «ب» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ج» و «د»

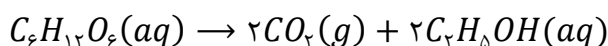
پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۱ - صفحه ۲۳ - ۱۱۰۱)

عبارت‌های (ج) و (د) درست هستند.
 سوخت‌های سبز، سوخت‌هایی هستند که در ساختار آن‌ها علاوه بر اتم‌های کربن و هیدروژن، عنصر اکسیژن نیز وجود دارد. یکی از این سوخت‌های سبز، اتانول است که از واکنش تخمیر گلوکز به دست می‌آید.

بررسی موارد:

الف) معادله موازنه شده تخمیر بی‌هوازی گلوکز به صورت زیر است:



این واکنش همان‌طور که از نام آن مشخص است (بی‌هوازی)، بدون حضور اکسیژن انجام می‌شود.

ب) با توجه به معادله موازنه شده، با مصرف ۱ مول گلوکز در این واکنش، ۲ مول سوخت سبز (اتانول) تولید می‌شود.

ج) در این واکنش اگر ۱ مول گلوکز معادل ۱۸۰ گرم از آن مصرف شود، ۲ مول اتانول معادل ۹۲ گرم اتانول تولید می‌شود. بنابراین

می‌توان گفت تقریباً نیمی از جرم گلوکز مصرف شده، به سوخت سبز تبدیل می‌شود.

د) یکی از راه‌های تهیه سوخت سبز، استفاده از بقایای گیاهانی مانند نیشکر، سیب‌زمینی و ذرت است. امروزه مزارع زیادی را برای تهیه

سوخت سبز، روغن و خوراک دام به کشت ذرت اختصاص می‌دهند.



۳۹- استفاده از گیاه پالایی برای کدام دو فلز کاربردی است؟

- (۱) طلا و نیکل (۲) روی و مس (۳) نیکل و روی (۴) مس و طلا

پاسخ: گزینه ۴

(آسان - خط‌به‌خط - سریع ۱ - صفحه ۲۵ - ۱۱۰۱)

جدول زیر اطلاعاتی درباره این چهار فلز را ارائه می‌دهد:

نماد شیمیایی فلز	قیمت هر کیلوگرم فلز (ریال)	بیشترین مقدار فلز در یک کیلوگرم از گیاه (گرم)	درصد فلز در سنگ معدن
Au	۱۲۰۰۰۰۰۰۰	۰/۱	۰/۰۰۲
Ni	۸۲۰۰۰۰	۳۸	۲
Cu	۲۴۵۰۰۰	۱۴	۰/۵
Zn	۱۵۵۰۰۰	۴۰	۵

درصد جرمی فلزهای طلا و مس در یک کیلوگرم از گیاه بیشتر از درصد جرمی این فلزها در سنگ معدن آن‌هاست. همچنین این فلزها ارزشمند هستند؛ بنابراین استفاده از گیاه پالایی برای استخراج آن‌ها به صرفه است. درصد جرمی روی در سنگ معدن بیشتر از یک کیلوگرم گیاه است و استفاده از گیاهان برای استخراج روی صرفه اقتصادی ندارد. همچنین درصد جرمی نیکل در یک کیلوگرم گیاه کمی بیشتر از درصد جرمی آن در سنگ معدن است؛ اما به دلیل قیمت پایین این فلز، استخراج نیکل از روش گیاه پالایی، مقرون به صرفه نیست.

یکی از روش‌های بیرون کشیدن فلزها از لابه‌لای خاک، استفاده از گیاهان (گیاه پالایی) است. به این منظور در معدن یا خاک دارای فلز، گیاهانی را می‌کارند که می‌توانند آن فلز را جذب کنند؛ سپس گیاه را برداشت کرده، می‌سوزانند و از خاکستر حاصل از آن، فلز را جداسازی می‌کنند. درصد فلز روی در سنگ معدن بیشتر از درصد فلز روی در یک کیلوگرم گیاه است، لذا روش گیاه پالایی برای فلز روی مناسب نیست. از طرفی، درصد فلز نیکل در سنگ معدن کمتر از درصد فلز نیکل در یک کیلوگرم گیاه است، با این حال استخراج نیکل نیز با این روش به علت قیمت کم نیکل صرفه اقتصادی ندارد. درصد فلزهای مس و طلا در سنگ معدن کمتر از درصد این فلزها در یک کیلوگرم گیاه است و همچنین این دو فلز قیمت بالایی نیز دارند؛ به همین علت استفاده از گیاهان برای استخراج این دو فلز صرفه اقتصادی بیشتری نسبت به استخراج آن‌ها از سنگ معدن دارد.



۴۰- کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

- (۱) در استخراج فلزها، بخش عمده‌ای از جرم سنگ معدن، به فلز مورد نظر تبدیل می‌شود.
- (۲) به دلیل بازگشت فلزهای استخراج شده به طبیعت، این منابع تجدیدپذیر محسوب می‌شوند.
- (۳) در پیشرفت پایدار، تمامی هزینه‌های اقتصادی، اجتماعی و زیست‌محیطی در نظر گرفته می‌شوند.
- (۴) در استخراج آهن، به ازای مصرف m کیلوگرم سنگ معدن، m کیلوگرم منابع معدنی دیگر نیز استفاده می‌شود.

(متوسط - خطبه‌خط - استاندارد ۱ - صفحه ۲۷ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

بر اساس توسعه پایدار باید در تولید یک ماده یا عرضه خدمات، همه هزینه‌ها و ملاحظه‌های اقتصادی، اجتماعی و زیست‌محیطی را در نظر گرفت. به‌طوری‌که اگر مجموع هزینه‌های بهره‌برداری از یک معدن با در نظر گرفتن این ملاحظه‌ها، کمترین مقدار ممکن باشد، در آن صورت در مسیر پیشرفت پایدار حرکت می‌کنیم؛ یعنی رفتارهای ما، آسیب کمتری به جامعه‌ای که در مسیر حفظ محیط زیست است، وارد می‌کند و ردپای زیست محیطی ما را کاهش می‌دهد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱ در استخراج فلز، تنها درصد کمی از سنگ معدن به فلز تبدیل می‌شود و در نتیجه بازده درصدی این واکنش پایین خواهد بود.
- ۲ شکل زیر فرایند استخراج فلز از طبیعت و بازگشت آن به طبیعت را نشان داده است.



سرعت استخراج فلزها بسیار بیشتر از سرعت بازگشت آن‌ها به طبیعت است. منبعی تجدیدناپذیر است که سرعت بازگشت آن به طبیعت از سرعت استخراج آن کمتر باشد و طبیعت نتواند مقدار استخراج شده را جبران کند. همچنین در منابع تجدیدپذیر، سرعت بازگشت ماده به طبیعت بیشتر از سرعت استخراج آن بوده و طبیعت فرصت دارد که منبع برداشت شده را جایگزین کند. در نظر داریم که از مقایسه آهنگ بازیافت با آهنگ استخراج یا بازگشت به طبیعت، نمی‌توان به تجدیدناپذیری یا تجدیدپذیری منبع مورد نظر پی برد.

- ۴ در استخراج ۱۰۰۰ کیلوگرم آهن (m)، به‌تقریب ۲۰۰۰ کیلوگرم سنگ معدن ($2m$) و ۱۰۰۰ کیلوگرم از منابع معدنی دیگر (m) استفاده می‌شود.



میخواهی خواندن پاسخنامه رو راحت تر کنی!
پس بیا پاسخ ویدیویی اش رو ببین!



● پس از پایان آزمون، می‌تونین پاسخنامه ویدیویی و تشریحی این آزمون رو با کلیک یا اسکن کردن این QRcode، از صفحه آپارات آزمون ماز مشاهده کنید.

