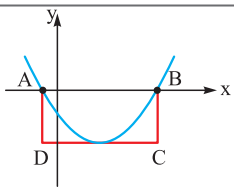
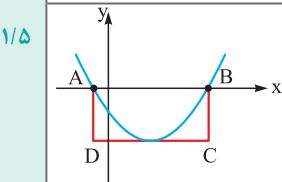


ریاضی (۲)		پایه یازدهم - رشته: علوم تجربی		زمان													
فصل ۱ (هندسه تحلیلی و جبر): جامع ۱		مدت آزمون: ۵۰ دقیقه		۱													
ردیف	نمره																
۱	۰/۷۵	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) اگر A و B دو نقطه هم‌طول در صفحه باشند، آن‌گاه $AB = x_A - x_B $. ب) اگر $a > 0$ آن‌گاه به ازای $x = \frac{-b}{2a}$ ، بیشترین مقدار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ اتفاق می‌افتد. ج) در حل معادلات گنگ تمام جواب‌های نهایی که در دامنه متغیر هستند، قابل قبول‌اند.															
۲	۰/۷۵	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) اگر دو خط عمود بر هم $ax + (b - a)y = 3$ و $(3a - b)x - ay - 2c = 0$ یکدیگر را در نقطه $(4, -1)$ قطع کنند، مقدار c برابر است با (a و b اعداد طبیعی هستند) ب) اگر رأس سهمی به معادله $y = 2x^2 + bx + c$ در ربع چهارم باشد، علامت b است. ج) عدد به عدد طلایی معروف است که مقدار تقریبی آن $1/618$ می‌باشد.															
۳	۰/۷۵	گزینه مناسب را انتخاب کنید. الف) نقاط $A(2, 3)$ و $B(-2, 0)$ مفروض‌اند. نسبت مساحت مربع ABCD به مربع ACBD چند است؟ <table><tr><td>$\frac{1}{4}$ (۱)</td><td>۲ (۲)</td><td>۱ (۳)</td><td>$\frac{1}{4}$ (۴)</td></tr></table> ب) معادله $(x + \frac{1}{x} + 2)(\sqrt{2 - x} - x) = 0$ چند جواب دارد؟ <table><tr><td>۱ (۱)</td><td>۲ (۲)</td><td>۳ (۳)</td><td>۴ (۴)</td></tr></table> ج) نمودار $y = ax^2 + bx + c$ دارای رأس به مختصات $(1, 1)$ و عرض از مبدأ ۳ می‌باشد. بیشترین مقدار سهمی $y = bx^2 - cx + a$ کدام است؟ <table><tr><td>$\frac{29}{16}$ (۱)</td><td>$\frac{41}{16}$ (۲)</td><td>$\frac{3}{8}$ (۳)</td><td>$-\frac{3}{8}$ (۴)</td></tr></table>				$\frac{1}{4}$ (۱)	۲ (۲)	۱ (۳)	$\frac{1}{4}$ (۴)	۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)	$\frac{29}{16}$ (۱)	$\frac{41}{16}$ (۲)	$\frac{3}{8}$ (۳)	$-\frac{3}{8}$ (۴)
$\frac{1}{4}$ (۱)	۲ (۲)	۱ (۳)	$\frac{1}{4}$ (۴)														
۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)														
$\frac{29}{16}$ (۱)	$\frac{41}{16}$ (۲)	$\frac{3}{8}$ (۳)	$-\frac{3}{8}$ (۴)														
۴	۱/۵	سه نقطه $A(1, -2)$ و $B(-1, 4)$ و $C(-3, 0)$ سه رأس یک مثلث‌اند. اگر نقاط M و N به ترتیب وسط اضلاع AB و AC باشند، مساحت مثلث AMN چه قدر است؟															
۵	۱/۲۵	نسبت مساحت به محیط بزرگ‌ترین دایره محصور بین خطوط موازی $2b - 1 = 2b - 1$ و $3x - 4y = 2b - 1$ برابر با ۲ است. $(a, b \in \mathbb{N})$ ، حاصل $a^2 + b$ را بیابید.															
۶	۱/۲۵	اگر جواب‌های معادله $x^2 + 2ax + a + 6 = 0$ برابر باشند $(a \in \mathbb{N})$ ، مجموع جواب‌های معادله $\frac{a^2}{3}x^2 - (3a - 3)x + 2 - a = 0$ چند برابر حاصل ضرب جواب‌های معادله است؟															
۷	۱/۵	در شکل مقابل، ضابطه سهمی برابر با $f(x) = ax^2 - 6ax - 7a$ و مساحت مستطیل ABCD برابر با ۴۸ باشد، فاصله رأس سهمی از مبدأ مختصات چه قدر است؟ 															
۸	۱	معادله مقابل را حل کنید. $\frac{x-2}{x+2} - \frac{2x}{2-x} = \frac{8}{x^2-4} + 1$															
۹	۱/۲۵	حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $\sqrt{x^2 + 2x + 3} = x^2 + 2x + 1$ را بیابید.															
۱۰	جمع نمرات	موفق باشید															



$$\frac{x-2}{x+2} - \frac{2x}{2-x} = \frac{8}{x^2-4} + 1$$

۹ حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1$ را بیابید.

۱۰ جمع نمرات موفق باشید

آزمون ۱ (فصل اول: جامع ۱)

۱ الف) نادرست (۰/۲۵)

اگر نقاط A و B هم طول باشند، عرض‌های متفاوت دارند و برای یافتن طول AB لازم است عرض‌های آن‌ها از یکدیگر کم شوند:

$$AB = |y_A - y_B|$$

ب) نادرست (۰/۲۵) اگر $a > 0$ باشد، سهمی رو به بالاست و مینیمم دارد و این کم‌ترین مقدار در $x = \frac{-b}{2a}$ اتفاق می‌افتد.

ج) نادرست (۰/۲۵)

این جواب‌ها به شرطی قابل قبول اند که:

(۱) در دامنه قرار داشته باشند، (۲) در معادله اصلی صدق کنند.

۲ الف) $\frac{5}{3}$ (۰/۲۵)

ابتدا شیب هر یک از خطوط را می‌یابیم.

$$1) ax + (b-a)y = 3 \Rightarrow (b-a)y = -ax + 3$$

$$\Rightarrow y = \frac{-a}{b-a}x + \frac{3}{b-a} \Rightarrow m = \frac{-a}{b-a}$$

$$2) (3a-b)x - ay - 2c = 0 \Rightarrow ay = (3a-b)x - 2c$$

$$\Rightarrow y = \frac{3a-b}{a}x - \frac{2c}{a} \Rightarrow m' = \frac{3a-b}{a}$$

چون دو خط عمودند، شیب‌های آن‌ها عکس و قرینه یکدیگرند؛ پس:

$$\frac{3a-b}{a} = \frac{b-a}{a} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3a^2 - ab = ab - a^2$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 2ab = 0 \quad (I)$$

از طرفی نقطه $(4, -1)$ در هر دو معادله صدق می‌کند؛ پس:

$$(4, -1): 4a - b + a = 3 \Rightarrow b = 5a - 3 \quad (II)$$

با جای‌گذاری (II) در (I) داریم:

$$4a^2 - 2a(5a - 3) = 0 \Rightarrow 4a^2 - 10a^2 + 6a = 0 \Rightarrow -6a^2 + 6a = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

که $a = 0$ با توجه به شرط $a \in \mathbb{N}$ غیر قابل قبول است؛ پس $a = 1$ ، لذا $b = 2$

(طبق II) با جای‌گذاری نقطه $(4, -1)$ و مقادیر a و b در خط دیگر داریم:

$$(3a-b)x - ay - 2c = 0 \xrightarrow{\substack{x=4 \\ y=-1 \\ a=1 \\ b=2}} 4 + 1 - 2c = 0$$

$$\Rightarrow 2c = 5 \Rightarrow c = \frac{5}{2}$$

ب) منفی (۰/۲۵) چون رأس سهمی در ربع چهارم است، پس x رأس سهمی مقداری

مثبت است؛ یعنی $\frac{-b}{2a} > 0$ و با توجه به این که $a > 0$ ، پس صورت نیز باید مثبت باشد؛

یعنی $-b > 0$ در نتیجه $b < 0$.

ج) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (۰/۲۵)

۳ الف) گزینه «۲» (۰/۲۵)

در مربع ABCD، رئوس A و B مجاور یکدیگرند، لذا فاصله آن دو برابر با ضلع است.

$$\begin{cases} A(2, 3) \\ B(-2, 0) \end{cases} \Rightarrow |AB| = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$\Rightarrow 25 = (\text{ضلع})^2 = \text{مساحت مربع}$$

در مربع ACBD، رئوس A و B روبه‌روی یکدیگرند، لذا فاصله آن دو برابر با قطر است.

$$\Rightarrow \frac{25}{2} = \frac{(\text{قطر})^2}{2} = \text{مساحت مربع}$$

$$\frac{25}{2} = 2 \quad \text{نسبت دو مساحت برابر است با:}$$

ب) گزینه (۳) (۰/۲۵)

اگر $ab = 0$ ، آن‌گاه $a = 0$ یا $b = 0$ ؛ پس باید دو معادله زیر حل شوند:

$$1) x + \frac{1}{x} + 2 = 0 \xrightarrow{\times x} x^2 + 1 + 2x = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \quad \text{قق}$$

$$2) \sqrt{2-x} - x = 0 \Rightarrow \sqrt{2-x} = x \xrightarrow{\text{توان } 2} 2-x = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \quad \text{قق} \\ x = 1 \quad \text{قق} \end{cases}$$

ج) گزینه (۲) (۰/۲۵)

تابع درجه ۲ با داشتن رأس سهمی یعنی $(1, 1)$ به صورت $y = a(x-1)^2 + 1$ نوشته می‌شود و چون نقطه $(0, 3)$ روی سهمی است؛ پس:

$$\begin{cases} 3 = a + 1 \Rightarrow a = 2 \\ y = 2(x-1)^2 + 1 = 2(x^2 - 2x + 1) + 1 = 2x^2 - 4x + 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases} \end{cases}$$

پس سهمی جدید به صورت $y = -4x^2 - 3x + 2$.

$$\text{رأس } x = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{-8} = -\frac{3}{8}$$

$$\text{رأس } y = -4\left(-\frac{3}{8}\right)^2 - 3\left(-\frac{3}{8}\right) + 2 = \frac{41}{16}$$

هم‌چنین می‌توانستیم مقدار ماکزیمم را مستقیماً از رابطه $y = \frac{-\Delta}{4a}$ به دست بیاوریم.

۴

$$AB \text{ وسط } M \xrightarrow{A(1, -2), B(-1, 4)} (x_M, y_M) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1-1}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = (0, 1) \quad (0/25)$$

$$AC \text{ وسط } N \xrightarrow{C(-2, 0), A(1, -2)} N = \left(\frac{1-2}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = (-1, -1) \quad (0/25)$$

در مثلث AMN اندازه MN برابر با قاعده است؛ پس:

$$\Delta AMN \text{ قاعده } |MN| = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}$$

$$= \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \quad (0/25)$$