

ریاضی (۲)		پایه یازدهم - رشته: علوم تجربی		۳		آزمون	
فصل ۲ (هندسه): جامع ۱		مدت آزمون: ۵۰ دقیقه					
ردیف	نمره						
۱	۰/۷۵	درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید. (الف) هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. (ب) برای عکس حکم کلی «اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد، آن گاه دو قطر برابر دارد.» مثال نقض وجود دارد. (ج) اگر نسبت کوچک ترین اضلاع دو مثلث متشابه برابر با $\frac{1}{3}$ باشد، نسبت مساحت های آن دو نیز $\frac{1}{3}$ است.					
۲	۰/۷۵	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. (الف) اگر $\frac{a}{3} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ باشد، حاصل $\frac{2a+2b+6c}{3b}$ برابر با است. (ب) در یک مثلث قائم الزاویه، نسبت اضلاع قائمه ۱ به ۳ است. اگر مساحت مثلث ۲۴ باشد، اندازه وتر برابر با است. (ج) طول اضلاع یک مثلث ۷، ۸ و ۹ و طول بزرگ ترین ضلع مثلثی متشابه با آن ۱۲ می باشد، محیط مثلث دوم برابر است با					
۳	۰/۷۵	گزینه مناسب را انتخاب کنید. (الف) پاره خط AB و CD را مطابق شکل در نظر بگیرید. اگر O نقطه ای باشد که از A و B به یک فاصله و از C و D به یک فاصله باشد، چند نقطه از نقاط A، B، C، D و روی دایره ای به مرکز O و شعاع OA قرار دارد؟ ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) نمی توان گفت.					
		(ب) در دوزنقه مقابل مقدار x چه قدر است؟ ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) (ج) برای درستی حکم «اگر x^2 عددی فرد باشد، n نیز عددی فرد است ($x \in \mathbb{N}$)» از استفاده می کنیم. ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) رد - مثال نقض رد - استدلال استقرایی اثبات - برهان خلف اثبات - استدلال استنتاجی					
۴	۱	فرض کنید نقطه A به فاصله ۲ سانتی متری از خط d باشد، روش رسم مثلث متساوی الساقین به رأس A را توضیح دهید که قاعده آن به d منطبق بوده و مساحت آن ۶ باشد.					
۵	۱/۲۵	اگر در دوزنقه مقابل M وسط AD و N وسط BC باشد، ثابت کنید: $MN = \frac{AB+DC}{2}$					
۶	۱/۲۵	با توجه به شکل مقابل نسبت $\frac{x}{y}$ را به دست آورید.					
۷	۰/۵	با استفاده از برهان خلف ثابت کنید از یک نقطه خارج از یک خط تنها یک عمود بر آن می توان رسم کرد.					
۸	۱/۵	برای هر یک از احکام کلی زیر یک مثال نقض ارائه دهید. (الف) معکوس هر عدد گویا عددی گویاست. (ب) برای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت $n^2 + n + 41$ عدی اول است.					
۹	۱/۵	(الف) با توجه به شکل مقابل ثابت کنید مثلث کوچک و مثلث بزرگ متشابه اند. (ب) مقدار x و y را به دست آورید.					

۱۰	در مثلث قائم‌الزاویه مقابل اندازه پاره‌های خواسته شده را بیاید.	۱/۲۵
		
۱۰	موفق باشید	جمع نمرات

(ج) گزینه (۳) (۰/۲۵)

۴ از آنجا که فاصله نقطه A از خط d برابر با ۲ است؛ پس ارتفاع مثلث مورد نظر ۲ می باشد (۰/۲۵) و چون مساحت آن ۶ است:

$S = \frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} \Rightarrow 6 = \frac{1}{2} \times 2 \times \text{قاعده} \Rightarrow \text{قاعده} = 6$ (ارتفاع) (۰/۲۵)
بنابراین قاعده باید ۶ سانتی متر باشد؛ پس کافی است از H (پای ارتفاع) کمانی به اندازه ۳ برزیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند (۰/۲۵)، واضح است که BC = ۶ و مثلث ABC همان مثلث مدنظر است. (۰/۲۵)

۵ ابتدا قطر AC را رسم نموده و محل برخورد آن با MN را P می نامیم:

$$MP \parallel DC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{MP}{DC} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{2} \quad (۰/۲۵)$$

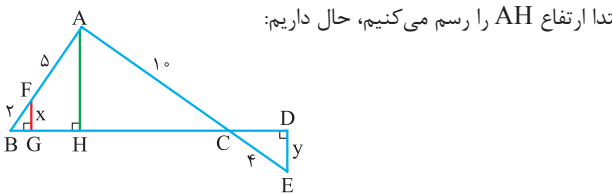
$$\Rightarrow MP = \frac{DC}{2} \quad (۰/۲۵)$$

$$PN \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{NP}{AB} = \frac{NC}{BC} = \frac{1}{2} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow NP = \frac{AB}{2} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow MN = MP + PN = \frac{AB}{2} + \frac{DC}{2} = \frac{AB+DC}{2} \quad (۰/۲۵)$$

۶ ابتدا ارتفاع AH را رسم می کنیم، حال داریم:



$$\triangle ABH \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{FG \parallel AH}{\text{تعمیم تالس}} \Rightarrow \frac{2}{y} = \frac{BF}{AB} = \frac{x}{AH} \Rightarrow x = \frac{2 \times AH}{y} \quad (۰/۲۵)$$

$$\begin{cases} \hat{C} = \hat{C} \\ \hat{H} = \hat{D} \end{cases} \Rightarrow \triangle ACH \sim \triangle ECD \Rightarrow \frac{CE}{AC} = \frac{DE}{AH}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{y}{AH} \Rightarrow y = \frac{AH \times 4}{10} \quad (۰/۲۵)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{2 \times AH}{y}}{\frac{AH \times 4}{10}} = \frac{5}{2} \quad (۰/۲۵)$$

۷ با استفاده از برهان خلف فرض می کنیم حکم نادرست است؛ بنابراین از نقطه M خارج از خط d، دو عمود متمایز H و H' را رسم می کنیم. (فرض خلف) (۰/۲۵)

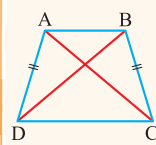
$$\triangle MHH': \hat{M} + \hat{H} + \hat{H}' = 180^\circ \Rightarrow \hat{M} = 0^\circ$$

و این یعنی H و H' بر هم منطبق اند که با فرضیات ما در تناقض است. (۰/۲۵) لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.

هم چنین می توانستیم بگوییم: در مثلث MHH' از آنجا که $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$ ؛ پس مجموع زوایای مثلث MHH' بیش از 180° می شود (۰/۲۵) که این با دانسته های قبلی ما در تناقض است، لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.

آزمون ۳ (فصل دوم: جامع ۱)

الف) درست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵)



عکس یعنی جای فرض و حکم عوض شود؛ پس عکس حکم کلی داده شده به صورت «اگر دو قطر یک چهارضلعی برابر باشند، آن گاه این چهارضلعی مستطیل است.» می باشد. که نادرست می باشد، زیرا در دوزنقه متساوی الساقین مقابل نیز قطرها برابرند؛ پس دارای مثال نقض است.

ج) نادرست (۰/۲۵)

اگر نسبت تشابه دو مثلث متشابه k باشد، نسبت اضلاع، ارتفاع ها و محیط k و نسبت مساحت ها k^2 می باشد؛ پس نسبت مساحت $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ است.

د) الف) ۴ (۰/۲۵)

$$\begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{b}{3} \Rightarrow 3a = 2b \\ \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow 4b = 3c \end{cases} \xrightarrow{\times 2} 8b = 6c$$

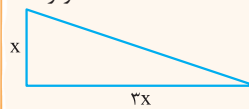
$$\frac{3a + 2b + 6c}{3b} = \frac{2b + 2b + 8b}{3b} = \frac{12b}{3b} = 4$$

ب) $\sqrt{160}$ یا $4\sqrt{10}$ (۰/۲۵)

$$S = \frac{3x \times x}{2} = 24 \Rightarrow 3x^2 = 48 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ 3x = 12 \end{cases} \Rightarrow \text{اضلاع قائمه } 16, 144 \Rightarrow \text{وتر } 160$$

$$\Rightarrow \text{وتر} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$



ج) ۳۲ (۰/۲۵)

می دانیم نسبت اضلاع متناظر همان نسبت تشابه است؛ پس:

$$\frac{\text{نسبت بزرگترین ضلع مثلث ۱}}{\text{نسبت بزرگترین ضلع مثلث ۲}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

هم چنین نسبت محیطها با نسبت تشابه برابر و نیز محیط مثلث اول برابر ۲۴ است؛ پس:

$$\frac{24}{\text{محیط مثلث دوم}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{محیط مثلث دوم} = \frac{4 \times 24}{3} = 32$$

د) الف) گزینه (۳) (۰/۲۵)

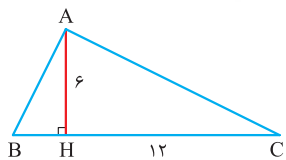
اگر O از A و B به یک فاصله باشد، روی عمود منصف پاره خط AB است. هم چنین اگر O از C و D به یک فاصله باشد، روی عمود منصف پاره خط DC است و O باید محل برخورد این دو عمود منصف باشد؛ پس قطعاً $OA = OB = OC = OD$ اگر از مرکز O دایره ای به شعاع OA رسم کنیم، قطعاً نقاط B، C و D نیز روی این دایره قرار می گیرند.

ب) گزینه (۲) (۰/۲۵)

با توجه به قضیه تالس در دوزنقه داریم:

$$\frac{2x-1}{2x+2} = \frac{x}{x+2} \Rightarrow (2x-1)(x+2) = x(2x+2)$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 2x \Rightarrow x = 2$$



$$AH^2 = BH \times HC \text{ (o/۲۵)} \Rightarrow 36 = BH \times 12 \Rightarrow BH = 3 \text{ (o/۲۵)}$$

$$\Rightarrow BC = 3 + 12 = 15 \text{ (o/۲۵)}$$

حالا در مثلث ACH داریم:

$$\underbrace{AC^2 = 6^2 + 12^2 = 36 + 144 = 180}_{\text{(o/۲۵)}} \Rightarrow AC = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \text{ (o/۲۵)}$$

۱۰

۸ الف صفر (o/۵)

ب) ۴۱ یا هر مضربی از آن (o/۵)

۹ الف

مثلث کوچک مثلث بزرگ

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{D} \text{ (o/۲۵)} \\ \hat{C} = \hat{C} \text{ (o/۲۵)} \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ACB} \sim \overset{\Delta}{DCE}$$

ب)

$$\frac{AC}{DC} = \frac{CB}{CE} = \frac{AB}{DE} \Rightarrow \frac{3x-1}{x+1} = \frac{3x+1}{2x-1} = \frac{y}{x} \text{ (o/۲۵)}$$

(۲) (۱)

$$۱) (3x-1)(2x-1) = (3x+1)(x+1)$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 5x + 1 = 3x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 9x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق ق (o/۲۵)} \\ x = 3 & \text{ق ق (o/۲۵)} \end{cases}$$

$$۲) \frac{1}{5} = \frac{y}{3} \Rightarrow y = 6 \text{ (o/۲۵)}$$