

ریاضی (۲)		پایه یازدهم – رشته: علوم تجربی		۱۲		آزمون	
فصل ۶ (حد و پیوستگی): جامع ۲		مدت آزمون:					
ردیف		نمره					
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (الف) شرط لازم برای آن که تابع f در نقطه x_0 دارای حد باشد این است که تابع f در نقطه x_0 تعریف شده باشد. (ب) اگر در نقطه‌ای مانند a دامنه مشترک دو تابع f و g داشته باشیم $f(a) \neq g(a)$ ، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ (ج) حد تابع ثابت در هر نقطه برابر با مقدار تابع ثابت است.						۰/۷۵
۲	جاهای خالی را با «است» یا «نیست» پر کنید. (الف) تابع $f(x) = \log_7 x$ روی بازه $(0, +\infty)$ پیوسته (ب) تابع $f(x) = \frac{\sin x + 1}{x}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته (ج) اگر f یک تابع چندجمله‌ای باشد، f روی $\mathbb{R}$ پیوسته (د) تابع $f(x) = \sqrt{1-x}$ در $x = 1$ دارای پیوستگی راست						۱
۳	گزینه مناسب را انتخاب کنید. (الف) اگر $f(x) = \lfloor \frac{x}{x} \rfloor$ باشد، حد راست تابع در $x = -\frac{1}{5}$ کدام است؟ (۱) -۱۱ (۲) -۱۰ (۳) -۳ (۴) -۴ (ب) تفاضل حد راست و چپ تابع $f(x) = \frac{ x^2 - x - 2 }{x^2 - 1}$ در $x = -1$ کدام است؟ (۱) ۳ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) ۱/۵ (ج) تابع $f(x) = [x - 2]$ در کدام نقطه ناپیوسته است؟ (۱) π (۲) -۱/۵ (۳) ۲ (۴) $\sqrt{2}$						۰/۷۵
۴	در هر مورد، توابع خواسته شده را ارائه دهید و بررسی کنید. (الف) تابعی مثال بزنید که در $x = 3$ حد نداشته باشد ولی $f(3) = 1$. (ب) توابع f و g را به گونه‌ای ارائه دهید که در نقطه $x = 1$ حد نداشته باشند ولی $(f - g)(x)$ در $x = 1$ حد داشته باشد.						۲/۲۵
۵	حدهای زیر را محاسبه کنید. (الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{2x - 6}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{3x^2 - 5x - 2}$						۱/۷۵
۶	اگر $\lim_{x \rightarrow 3a} \frac{2x - 6a}{x^2 - 9a^2} = \frac{1}{6}$ باشد مقدار a چقدر است؟						۱
۷	با توجه به شکل مقابل به سوالات پاسخ دهید. (الف) مقادیر زیر را به دست آورید. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$ (ب) نقطه‌ای مثال بزنید که تابع در آن نقطه حد داشته باشد ولی تعریف نشده باشد. (ج) نقطه‌ای مثال بزنید که تابع در آن نقطه پیوستگی راست داشته باشد ولی حد نداشته باشد.						۱/۲۵
۸	نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 2 \\ -2 & x = 2 \\ -x + 1 & x > 2 \end{cases}$ را رسم کنید. f در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟						۱/۲۵
جمع نمرات		۱۰		موفق باشید			

آزمون ۱۲ (فصل ششم: جامع ۲)

الف) نادرست (۰/۲۵)

این شرط، در پیوستگی لازم است.

به عنوان مثال تابع $f(x) = \begin{cases} x & x > 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ حد دارد اما تعریف نشده است.

ب) نادرست (۰/۲۵)

به این دو تابع دقت کنید $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \neq 2 \\ 5 & x = 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x + 1 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$

واضح است که $f(2) \neq g(2)$ اما $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$

ج) درست (۰/۲۵) درست است و این مطلب عیناً در متن کتاب درسی آورده شده است.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$$

الف) نیست (۰/۲۵) زیرا $f(0)$ تعریف نشده است (می دانیم $\log_b a$ برای $a > 0$

و $b > 0$ و $b \neq 1$ تعریف شده است.)

ب) است (۰/۲۵) توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ در $\mathbb{R}$ پیوسته هستند؛ پس

$b \sin x + a$ نیز پیوسته است.

ج) است (۰/۲۵) توابع چندجمله‌ای در تمام $\mathbb{R}$ پیوسته هستند.

د) نیست (۰/۲۵) زیرا $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{1-x}$ تعریف نشده است (دقت داشته باشید زیر رادیکال

منفی می‌شود).

۳) الف) گزینه «۱» (۰/۲۵)

$$x > \frac{-1}{\delta} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{x} < -\delta \Rightarrow \frac{2}{x} < -10$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{\delta})^+} \left[\frac{2}{x} \right] = [(-10)^-] = -11$$

ب) گزینه «۱» (۰/۲۵)

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(-)(+)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-(x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(-)(-)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} - \left(\frac{-3}{2} \right) = \frac{6}{2} = 3$$

ج) گزینه «۳» (۰/۲۵) تابع $f(x) = [x] - 2$ در تمام نقاط صحیح ناپیوسته است؛ پس در

$(x = 2)$ ناپیوسته است.

۴) الف)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 3 \\ 2x & x < 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6 \end{cases} \Rightarrow \text{حد ندارد}$$

$$(1/۲۵) \quad g(x) = f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} \quad (ب)$$

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$l_2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$

$$(f-g)(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (f-g)(x) = 0$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{2x-6} = 0 \quad (0/۲۵) \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{2x-6} = \sqrt{0} \quad (0/۲۵) \end{cases} \Rightarrow \text{وجود ندارد.} \quad (0/۲۵)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{0}{0} \quad (0/۲۵)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(3x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x+4}{3x+1} = \frac{12}{7} \quad (0/۲۵)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3a} \frac{2x-6a}{x^2-9a^2} = \frac{6a-6a}{9a^2-9a^2} = \frac{0}{0} \quad (0/۲۵)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3a} \frac{2(x-3a)}{(x-3a)(x+3a)} = \lim_{x \rightarrow 3a} \frac{2}{x+3a} = \frac{2}{6a} = \frac{1}{3a} \Rightarrow a = 2 \quad (0/۲۵)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \begin{cases} L_1 = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \text{ وجود ندارد.} \quad (0/۲۵) \\ L_2 = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -2 \quad (0/۲۵) \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ وجود ندارد.} \quad (0/۲۵)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -3 \quad (0/۵)$$

ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2$ اما $f(-1)$ تعریف نشده است. (۰/۲۵)

ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = 2$ ولی $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = f(\frac{3}{2}) = 0$ (۰/۲۵)

۸) تابع در $x = 2$ ناپیوسته است. (۰/۲۵) و

در سایر نقاط $(\mathbb{R} - \{2\})$ پیوسته است. (۰/۲۵)

