آزمون ۱۱

ریاضی (۲) | پایهٔ یازدهم ـ رشته: علوم تجربی | تاریخ آزمون: ....

فصل ۶ (حد و پیوستگی): جامع ۱

مدت آزمون: ۵۰ دقیقه

ردیف — نمره

۱ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. — ۰/۷۵

الف) اگر تابع f و g هیچ‌کدام در نقطهٔ $x_۰$ حد نداشته باشند، $f+g$ نیز در $x_۰$ حد ندارد.

ب) اگر f در تمام دامنه‌اش پیوسته باشد، می‌گوییم f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

ج) اگر f در نقطهٔ $x_۰$ پیوسته باشد، آن‌گاه لزوماً $x_۰ \in D_f$.

۲ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. — ۱/۲۵

الف) اگر تابع f در بازهٔ $(a,x_۰)$ تعریف شده باشد، حد راست f در نقطهٔ $x_۰$ تعریف‌شده ....

ب) مجموع نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲-۴x}$ برابر است با ....

ج) قدرمطلق اختلاف حد راست و چپ تابع $f(x)=\frac{|x^۲-۹|}{x^۲-۹}+\frac{x-۳}{|x-۳|}$ در $x=۳$ برابر با .... است.

د) تابع $f(x)=-۳x-x^۲[x]$ در $x=۰$ .... و در $x=۲$ .... است. (پیوسته / ناپیوسته)

۳ گزینهٔ مناسب را انتخاب کنید. — ۰/۷۵

الف) تابع $f(x)=a[x]+۳[x-۱]$ در نقطهٔ $x=۲$ حد دارد. مقدار a کدام است؟

۱) صفر ۲) -۳ ۳) -۱ ۴) هیچ مقدار a

ب) مقدار $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۶})^-}[\cot^۲ x]$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

ج) اگر $\lim\limits_{x\to x_۰} f(x)=۰$ حاصل $\lim\limits_{x\to x_۰}\sqrt{f(x)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $x_۰$ ۴) ممکن است وجود نداشته باشد.

۴ پاسخ کوتاه دهید: — ۱

الف) تابعی مثال بزنید که در $x_۰=۲$ حدی برابر -۲ داشته باشد ولی پیوسته نباشد.

ب) بازه‌ای مثال بزنید که $f(x)=[x]$ در آن پیوسته و ابتدا و انتهای بازه عدد طبیعی باشد.

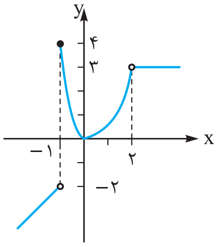
۵ حدهای خواسته‌شده را به دست آورید. — ۲/۵

الف) $$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\frac{۵}{x^۲}+\frac{۳}{x}-\frac{۱}{x^۳}}{\frac{۲}{x}-\frac{۱}{x^۲}+\frac{۶}{x^۳}}$$

ب) $$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۱۴}-۲\sqrt{x+۲}}{x^۲-۴}$$

ج) $$\lim_{x\to ۰^-}([x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]+[x^۵])$$

۶ با توجه به شکل، مقادیر زیر را بیابید. — ۱



الف) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$

۷ اگر حد تابع f در a موجود و $\lim\limits_{x\to a}\frac{۳f(x)+۱}{f(x)+۱}=۵$ باشد، $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{۷-f(x)}$ را به دست آورید. — ۱/۲۵

۸ اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax^۲+a^۲x & x>۲ \\ ۳ax+۲b & x=۲ \\ a^۲-۲x & x<۲ \end{cases}$ در $x=۲$ پیوسته باشد، مقدار a و b را به دست آورید. — ۱/۵

موفق باشید — جمع نمرات ۱۰

آزمون ۱۱ (فصل ششم: جامع ۱)

۱ الف) نادرست (۰/۲۵)

تابع $f(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-۱ & x>۰\\ ۱ & x<۰\end{cases}$ هر دو در صفر حد ندارند، اما $(f+g)(x)=۰\ (x\neq ۰)$ که در تمام نقاط از جمله صفر حد دارد.

ب) نادرست (۰/۲۵) ممکن است دامنهٔ f برابر با $\mathbb{R}$ نباشد.

ج) درست (۰/۲۵) یکی از شروط پیوستگی این است که $\lim\limits_{x\to x_۰} f(x)=f(x_۰)$ و این یعنی باید $f(x_۰)$ تعریف‌شده باشد.

۲ الف) نیست (۰/۲۵) زیرا تابع در $x_۰$ دارای همسایگی راست نیست!

ب) ۴ (۰/۲۵)

شرط لازم پیوستگی f در نقطهٔ $x_۰$ این است که $x_۰\in D_f$ باشد و اگر $x_۰\notin D_f$، آن‌گاه قطعاً f در $x_۰$ ناپیوسته است؛ پس دامنهٔ f را می‌یابیم:

$$x^۲-۴x=۰ \Rightarrow x(x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۰\\ x=۴\end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰,۴\}$$

و این تابع در صفر و ۴ پیوسته نیست و در سایر نقاط پیوسته است که مجموع این دو نقطه $۰+۴=۴$ است.

ج) ۴ (۰/۲۵)

$$L_۱=\lim_{x\to ۳^+}\Big(\frac{\overbrace{|x^۲-۹|}^{+}}{x^۲-۹}+\frac{x-۳}{\underbrace{|x-۳|}_{+}}\Big)=\lim_{x\to ۳^+}\Big(\frac{x^۲-۹}{x^۲-۹}+\frac{x-۳}{x-۳}\Big)=۱+۱=۲$$

$$L_۲=\lim_{x\to ۳^-}\Big(\frac{\overbrace{|x^۲-۹|}^{-}}{x^۲-۹}+\frac{x-۳}{\underbrace{|x-۳|}_{-}}\Big)=\lim\Big(\frac{-(x^۲-۹)}{x^۲-۹}+\frac{x-۳}{-(x-۳)}\Big)=-۲$$

$$\Rightarrow |۲-(-۲)|=۴$$

د) پیوسته (۰/۲۵)/ ناپیوسته (۰/۲۵)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=-۳(۰)-۰^۲\underbrace{[۰^+]}_{۰}=۰\\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-۳(۰)-۰^۲\underbrace{[۰^-]}_{-۱}=۰\\ f(۰)=۰\end{array}\right\} \Rightarrow \text{تابع در } x=۰ \text{ پیوسته است.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=-۳(۲)-۴\overbrace{[۲^+]}^{۲}=-۶-۸=-۱۴\\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=-۳(۲)-۴\underbrace{[۲^-]}_{۱}=-۶-۴=-۱۰\end{array}\right. \neq \Rightarrow \text{تابع در } x=۲ \text{ ناپیوسته است.}$$

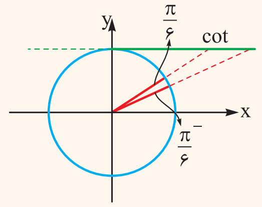
۳ الف) گزینهٔ «۲» (۰/۲۵)

$$L_۱=\lim_{x\to ۲^+} f(x)=a\overbrace{[۲^+]}^{۲}+۳\overbrace{\underbrace{[۲^+-۱]}_{۱^+}}^{۱}=۲a+۳$$

$$\Rightarrow ۲a+۳=a \Rightarrow a=-۳$$

$$L_۲=\lim_{x\to ۲^-} f(x)=a\overbrace{[۲^-]}^{۱}+۳\underbrace{[۲^--۱]}_{۱^-}=a$$

ب) گزینهٔ «۲» (۰/۲۵)



می‌دانیم $\cot\frac{\pi}{۶}$ برابر است با $\sqrt{۳}$ و چون $x \to (\frac{\pi}{۶})^-$ با توجه به این‌که cot در ربع اول کاهشی است، پس:

$$\frac{\pi}{۶}>(\frac{\pi}{۶})^- \Rightarrow \cot\frac{\pi}{۶}<\cot(\frac{\pi}{۶})^- \Rightarrow \sqrt{۳}<\cot(\frac{\pi}{۶})^-$$

$$\Rightarrow \cot(\frac{\pi}{۶})^-=\sqrt{۳}^+ \Rightarrow \cot^۲(\frac{\pi}{۶})^-=۳^+ \Rightarrow [\cot^۲\frac{\pi}{۶}^-]=[۳^+]=۳$$

ج) گزینهٔ «۴» (۰/۲۵)

$\lim\limits_{x\to ۰} x=۰$ اما $\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{x}$ تعریف نشده و وجود ندارد.

۴ الف) $f(x)=\begin{cases}x-۴ & x>۲\\ -۲ & x<۲\end{cases}$ (۰/۵) که $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=-۲$ اما چون $f(۲)$ تعریف‌نشده است تابع در $x=۲$ ناپیوسته است.

ب) هر بازه به شکل $\overbrace{[a,b)\ \text{یا}\ (a,b)}^{(۰/۵)}$ که در آن‌ها a و b دو عدد متوالی طبیعی باشد جواب است، مثل $[۲,۳)$ یا $(۲,۳)$

۵ الف)

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\overbrace{\dfrac{۵x+۳x^۲-۱}{\cancel{x^۳}}}^{(۰/۲۵)}}{\underbrace{\dfrac{۲x^۲-x+۶}{\cancel{x^۳}}}_{(۰/۲۵)}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۵x+۳x^۲-۱}{۲x^۲-x+۶}=\frac{-۱}{۶}\ (۰/۲۵)$$

ب)

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۱۴}-۲\sqrt{x+۲}}{x^۲-۴}=\frac{۰}{۰}\ \text{مبهم}$$

$$\text{رفع ابهام}\ \lim_{x\to ۲}\underbrace{\frac{\sqrt{x+۱۴}-۲\sqrt{x+۲}}{x^۲-۴}\times\frac{\sqrt{x+۱۴}+۲\sqrt{x+۲}}{\sqrt{x+۱۴}+۲\sqrt{x+۲}}}_{(۰/۲۵)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{x+۱۴-۴x-۸}{(x^۲-۴)(\sqrt{x+۱۴}+۲\sqrt{x+۲})}=\underbrace{\lim_{x\to ۲}\frac{-۳x+۶}{(x^۲-۴)(\sqrt{x+۱۴}+۲\sqrt{x+۲})}}_{(۰/۲۵)}$$

$$\underbrace{\lim_{x\to ۲}\frac{-۳(\cancel{x-۲})}{(\cancel{x-۲})(x+۲)(\sqrt{x+۱۴}+۲\sqrt{x+۲})}}_{(۰/۲۵)}=\frac{-۳}{۴(۴+۴)}=\frac{-۳}{۳۲}\ (۰/۲۵)$$

ج)

$$\lim_{x\to ۰^-}[x]=\lim_{x\to ۰^-}[x^۳]=\lim_{x\to ۰^-}[x^۵]=[۰^-]=-۱\ (۰/۲۵)$$

$$\lim_{x\to ۰^-}[x^۲]=\lim_{x\to ۰^-}[x^۴]=[۰^+]=۰\ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \overbrace{\lim_{x\to ۰^-}[x]}^{-۱}+\overbrace{\lim_{x\to ۰^-}[x^۲]}^{۰}+\overbrace{\lim_{x\to ۰^-}[x^۳]}^{-۱}+\overbrace{\lim_{x\to ۰^-}[x^۴]}^{۰}+\overbrace{\lim_{x\to ۰^-}[x^۵]}^{-۱}=-۳\ (۰/۲۵)$$

۶ الف) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = ۰$ (۰/۲۵)

ب)

$$\begin{cases} L_۱ = \lim\limits_{x\to -۱^+} f(x) = ۴ \; (۰/۲۵) \\ L_۲ = \lim\limits_{x\to -۱^-} f(x) = -۲ \; (۰/۲۵) \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ وجود ندارد چون $L_۱ \neq L_۲$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = ۳$ (۰/۲۵)

۷ فرض می‌کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$:

$$\underbrace{\lim_{x\to a} \frac{۳f(x)+۱}{f(x)+۱} = \frac{۳\lim\limits_{x\to a} f(x)+۱}{\lim\limits_{x\to a} f(x)+۱}}_{(۰/۲۵)} = \frac{۳L+۱}{L+۱} = ۵ \; (۰/۲۵) \;\Rightarrow\; ۵L+۵$$

$$= ۳L+۱ \;\Rightarrow\; L = -۲ \; (۰/۲۵)$$

$$\underbrace{\lim_{x\to a} \sqrt{۷-f(x)} = \sqrt{۷-\lim\limits_{x\to a} f(x)}}_{(۰/۲۵)} = \sqrt{۷-(-۲)} = \sqrt{۹} = ۳ \; (۰/۲۵)$$

۸

$$L_۱ = \lim_{x\to ۲^+} ax^۲ + a^۲x = ۴a + ۲a^۲ \; (۰/۲۵)$$

$$L_۲ = \lim_{x\to ۲^-} a^۲ - ۲x = a^۲ - ۴ \; (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{L_۱=L_۲} ۲a^۲ + ۴a = a^۲ - ۴ \;\Rightarrow\; a^۲ + ۴a + ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow\; (a+۲)^۲ = ۰ \;\Rightarrow\; a = -۲ \; (۰/۲۵)$$

$$L = \lim_{x\to ۲} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} a^۲ - ۲x = \lim_{x\to ۲^+} ax^۲ + a^۲x \underset{x=۲}{\overset{a=-۲}{=\!=\!=}} ۰ \; (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow\; f(۲) = ۰ \; (۰/۲۵) \Rightarrow\; ۳ax + ۲b = ۰ \xrightarrow[x=۲]{a=-۲} ۳(-۲)(۲) + ۲b = ۰$$

$$\Rightarrow ۲b = ۱۲ \Rightarrow b = ۶ \; (۰/۲۵)$$