



سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴



دفترچه سؤال

تسلط بر کل کتاب



سه شنبه

۱۴۰۴/۰۳/۰۶



ماز

گروه آزمایشی ریاضی و فیزیک - پایه یازدهم
آزمون جامع شبیه ساز امتحانات نهایی ماز - شب امتحان

درس	تعداد صفحه	زمان پاسخگویی
هندسه	۲	۱۰۰ دقیقه

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه آرای، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می شود.

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیر قانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

هندسه ۲

کل کتاب

بودجه‌بندی این آزمون

استراتژی و هدف گذاری در آزمون شبیه‌ساز نهایی ماز

- تبدیل به یک دانش‌آموز حرفه‌ای در امتحان تشریحی و ۲۰ گرفتن
- تسلط بر نحوه تشریحی نوشتن در حد یک مصحح آموزش و پرورش
- تمام اشتباهات احتمالی در امتحان نهایی رو قبل از امتحان نهایی تجربه کنید

زودبسته

دوپینگ فوری برای شب امتحان

اگه قصد دارید خیلی زود به نمره ۲۰ برسید، دوره «زود ۲۰» برای شماست!

- ۶ مرحله آزمون شبیه‌ساز و پیش‌بینی نهایی برای ۶ درس امتحان نهایی
- تصحیح فوری آزمون شب امتحان به سبک آموزش و پرورش
- جزوه دوپینگ فوری شب امتحان + راهنمای کامل تشریحی نویسی ویژه هر درس

هدیه ویژه: بسته کتاب‌های ۲۰ شو در اپلیکیشن دیجی‌ماز

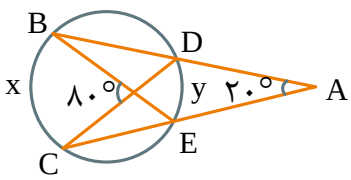
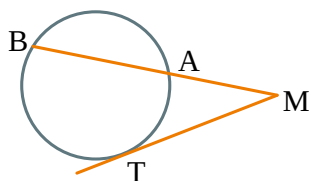
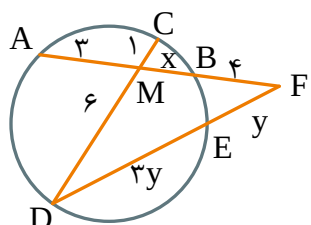
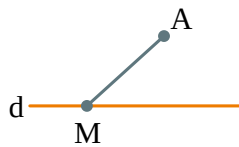


SanjeshCloud

www.SanjeshCloud.ir



به نام خدا

سؤالات آزمون نهایی درس: هندسه ۲		تعداد صفحه: ۲	رشته:	ریاضی و فیزیک	ساعت شروع:
دوره دوم متوسطه - یازدهم		تاریخ آزمون:	۱۴۰۴/۰۳/۰۶	نام و نام خانوادگی:	مدت زمان: ۱۰۰ دقیقه
آزمون شبیه ساز امتحان نهایی			گروه آموزشی ماز		
ردیف	سؤالات (پاسخبرگ دارد)	نمره			
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. (الف) دو دایره مماس خارج فقط یک مماس مشترک خارجی دارند. (ب) یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر زوایای مقابل آن مکمل باشند. (پ) در حالت کلی بازتاب شیب خط را حفظ نمی کند.	۰.۷۵			
۲	در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. (الف) زاویه ای که رأس آن یک نقطه از دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از همان دایره باشند را زاویه می نامند. (ب) دو دایره به شعاع های ۳ و ۱ واحد و طول خط المکرزین ۲ واحد، نسبت به هم هستند. (پ) شعاع دایره محاطی خارجی مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۲، برابر است.	۰.۷۵			
۳	در شکل مقابل، اندازه زاویه DBE را تعیین کنید.	۱.۵			
۴	با توجه به شکل مقابل ثابت کنید: $MT^2 = AM \times BM$	۱.۲۵			
۵	در دایره زیر مقادیر مجهول x و y را بیابید.	۱.۵			
۶	دو دایره متخارج اند. اگر طول مماس مشترک داخلی و خارجی آنها به ترتیب $\sqrt{15}$ و $3\sqrt{7}$ بوده و طول خط المکرزین ۸ باشد، اندازه شعاع های این دو دایره را بیابید.	۱.۵			
۷	نشان دهید اگر یک چهارضلعی محیطی باشد، آن گاه مجموع اندازه های دو ضلع مقابل برابر مجموع اندازه های دو ضلع مقابل دیگر است.	۱.۵			
۸	در شکل مقابل، ابتدا بازتاب نقطه A را نسبت به محور بازتاب d مشخص کنید و آن را A' بنامید، سپس نشان دهید $AM = A'M$.	۱			



به نام خدا

سؤالات آزمون نهایی درس: هندسه ۲		تعداد صفحه: ۲	رشته:	ریاضی و فیزیک	ساعت شروع:
دوره دوم متوسطه - یازدهم		تاریخ آزمون:	۱۴۰۴/۰۳/۰۶	نام و نام خانوادگی:	مدت زمان: ۱۰۰ دقیقه
آزمون شبیه ساز امتحان نهایی			گروه آموزشی ماز		
ردیف	سؤالات (پاسخبرگ دارد)				
۹	نقطه A به فاصله $2\sqrt{6}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطه A را تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطه A' می نامیم. نقطه A را حول نقطه A' به اندازه ۱۲۰ درجه در جهت عقربه های ساعت دوران می دهیم تا نقطه A'' حاصل شود. طول پاره خط AA'' را محاسبه کنید.				
۱۰	یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{2}{3}$ و به مرکز محل تلاقی قطرهای تصویر کرده ایم. اگر مساحت ناحیه بین مربع و تصویرش ۵ باشد، محیط مربع اولیه را بیابید.				
۱۱	اگر دو شهر A و B در دو طرف یک رودخانه قرار داشته باشند و بخواهیم جاده ای از A به B بسازیم به طوری که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، محل احداث پل را کجا در نظر بگیریم که AMNB کوتاه ترین مسیر ممکن باشد؟ ادعای خود ثابت کنید.				
۱۲	در شکل مقابل، $BC = 3\sqrt{2}$ ، $CD = 4\sqrt{2}$ و $\widehat{BCD} = 150^\circ$ است. با ثابت نگه داشتن محیط و تعداد اضلاع، مساحت را افزایش دهید و مقدار این افزایش را بیابید.				
۱۳	در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ به ترتیب نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند. ثابت کنید $PQ \parallel BC$.				
۱۴	در مثلث ABC، $AB = 3$ ، $AC = 5$ و $BC = 7$ است. (الف) طول نیمساز داخلی زاویه C را بیابید. (ب) طول میانه وارد بر ضلع BC را محاسبه کنید. (پ) مساحت مثلث را با استفاده از دستور هرون به دست آورید. (ت) اندازه زاویه A را به دست آورید. (A منفرجه است)				
۲۰	موفق باشید.				





سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴

سه شنبه

۱۴۰۴/۰۳/۰۶

تسلط بر کل کتاب



گروه آزمایشی ریاضی و فیزیک - پایه یازدهم
آزمون های شبیه ساز امتحانات نهایی ماز - شب امتحان

پاسخبرگ هندسه ۲

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه آرای، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می شود.

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

نکات مهم برای گرفتن نمره کامل!

۱ خوش خط و خوانا بنویسید:

دقت کنید که نوشته‌هایتان خوانا و مرتب باشند. این کار نه تنها به فهم بهتر مطالب توسط مصحح کمک می‌کند، بلکه نظم و دقت شما را نیز نشان می‌دهد.

۲ استفاده از کلمات و جملات مشابه کتاب درسی:

تلاش کنید پاسخ‌هایتان را با عبارات و اصطلاحات موجود در کتاب درسی هماهنگ کنید. این کار باعث می‌شود مصحح ببیند که به متن درسی تسلط دارید و مستقیماً از منابع درسی استفاده کرده‌اید.

۳ از نوشتن مطلب اضافی خودداری کنید:

به هیچ وجه از حاشیه‌پردازی و نوشتن مطالب اضافی که در سؤال مطرح نشده است، خودداری کنید. فقط به پاسخ مستقیم سؤال بپردازید و از اضافه کردن اطلاعات غیر ضروری پرهیز کنید.

۴ نوشتن فرمول‌ها و مراحل کامل حل سؤال:

در مسائل محاسباتی، تنها جواب نهایی کافی نیست؛ شما باید مراحل کامل حل سؤال را به طور واضح و دقیق بنویسید. فرمول‌ها، مراحل محاسبه و دلایل انتخاب راه‌حل‌ها را حتماً ذکر کنید تا نشان دهید که روش حل مسئله را به خوبی متوجه شده‌اید.

۵ نوشتن یکاها و جواب نهایی:

در دروسی که نیاز به محاسبات دارند، فراموش نکنید که علاوه بر نوشتن جواب نهایی، یکاهای مربوط به هر کمیت را هم درج کنید. یکای صحیح می‌تواند نشان دهد که شما به جزئیات دقت کرده‌اید و درک صحیحی از مفهوم سؤال دارید.



به نام خدا

آزمون شبیه ساز نهایی درس: هندسه ۲	تعداد صفحه: ۵	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۱۰۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه - یازدهم	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۰۶	مدت زمان: ۱۰۰ دقیقه

ردیف	پاسخبرگ	نمره
------	---------	------

پاسخهای خود را در محل های تعیین شده به صورت دقیق، خوش خط و مرتب در این برگه وارد کنید.

۱	الف) ب) پ)	۰.۷۵
۲	الف) ب) پ)	۰.۷۵
۳		۱.۵
۴		۱.۲۵



به نام خدا

آزمون شبیه ساز نهایی درس: هندسه ۲	تعداد صفحه: ۵	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه - یازدهم	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۰۶	مدت زمان: ۱۰۰ دقیقه
ردیف	پاسخبرگ		
نمره			
پاسخهای خود را در محل های تعیین شده به صورت دقیق، خوش خط و مرتب در این برگه وارد کنید.			

۵	۱.۵
۶	۱.۵
۷	۱.۵



به نام خدا

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: هندسه ۲	تعداد صفحه: ۵	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه - یازدهم	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۰۶	مدت زمان: ۱۰۰ دقیقه
ردیف	پاسخبرگ		
نمره			
پاسخ‌های خود را در محل‌های تعیین شده به صورت دقیق، خوش خط و مرتب در این برگه وارد کنید.			

۸	۱
۹	۱.۵
۱۰	۱.۲۵



به نام خدا

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: هندسه ۲	تعداد صفحه: ۵	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه – یازدهم	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۰۶	مدت زمان: ۱۰۰ دقیقه
ردیف	پاسخبرگ		
	نمره		
پاسخ‌های خود را در محل‌های تعیین شده به صورت دقیق، خوش خط و مرتب در این برگه وارد کنید.			

۱۱	۱.۲۵
۱۲	۱
۱۳	۱.۲۵



SanjeshCloud

www.SanjeshCloud.ir



به نام خدا

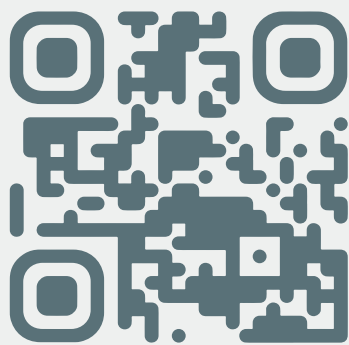
آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: هندسه ۲	تعداد صفحه: ۵	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه - یازدهم	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۰۶	مدت زمان: ۱۰۰ دقیقه
ردیف	پاسخبرگ		
نمره			
پاسخ‌های خود را در محل‌های تعیین شده به صورت دقیق، خوش خط و مرتب در این برگه وارد کنید.			

۴	(الف)	۱۴
	(ب)	
	(پ)	
	(ت)	
۲۰	موفق باشید.	



SanjeshCloud

www.SanjeshCloud.ir



سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴



دفترچه پاسخ

تسلط بر کل کتاب



سه شنبه

۱۴۰۴/۰۳/۰۶



ماز

گروه آزمایشی ریاضی و فیزیک - پایه یازدهم
آزمون جامع شبیه ساز امتحانات نهایی ماز - شب امتحان

درسی	مسئول درس	ویراستاری
هندسه	محدثه شیخعلی - سید جواد نظری	ارسلان حسنونند - حمیدرضا ولی پور نرجس تیمناک

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه آرای، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می شود.

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

راهنمای پاسخنامه برای بچه‌های مازی!

مصَحَّح شو:



پاسخ دقیق سؤال این‌جا میاد و اسمش روشه: «مصَحَّح شو»، می‌خواد شما رو به یه مصَحَّح حرفه‌ای و دقیق تبدیل کنه که بدونین موقع ارزیابی جواب‌هاتون باید حواستون به چی باشه تا توی آزمون‌های بعدی دقیق‌تر عمل کنین. اگه جواب یه سؤال رو بشه به شکل‌های مختلف بیان کرد، اون هم، این‌جا بهتون گفتیم.

بررسی دقیق‌تر:



اگه پاسخ کوتاه به سؤال کافی نباشه تا ببینین چطوری باید به جواب برسین، توی این بخش با بررسی دقیق‌تر جواب، سؤال رو براتون توضیح دادیم.

نقشه نهایی:



امتحان نهایی قوانین و قواعد خاص خودش رو داره؛ شما باید بدونین تیپ‌های رایج سؤال‌های امتحان نهایی چیه و باید چطوری بهش جواب بدین. این کادر، مشاوره حرفه‌ای ماست به شما تا فوت و فن‌های امتحان نهایی رو یاد بگیرین.

۲۰ شو:



توی «۲۰ شو»، مبحث هر سؤال رو براتون مرور یا جمع‌بندی کردیم؛ «۲۰ شو» و درسنامه‌هاش دقیقاً فاصله بین نمره خوب و نمره ۲۰ رو براتون پر می‌کنه.

نکته طلایی:



با وجود «۲۰ شو»، که کلی درسنامه مفصل داره، باز هم اگه نکته مهم و مفیدی بود، توی این کادر براتون آوردیم.

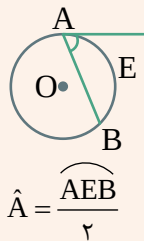


راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: هندسه ۲		رشته:	ریاضی و فیزیک
دوره دوم متوسطه - یازدهم	تاریخ آزمون:	ساعت شروع:	مدت زمان: ۱۰۰ دقیقه
۱۴۰۴/۰۳/۰۶		گروه آموزشی ماز	
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی			
ردیف	راهنمای تصحیح		
نمره			
۰.۷۵	وضعیت دو دایره و تعداد مماس مشترک‌های آن‌ها وضعیت دو دایره و تعداد مماس مشترک‌های آن‌ها وضعیت دو دایره و تعداد مماس مشترک‌های آن‌ها وضعیت دو دایره و تعداد مماس مشترک‌های آن‌ها وضعیت دو دایره و تعداد مماس مشترک‌های آن‌ها وضعیت دو دایره و تعداد مماس مشترک‌های آن‌ها وضعیت دو دایره و تعداد مماس مشترک‌های آن‌ها وضعیت دو دایره و تعداد مماس مشترک‌های آن‌ها وضعیت دو دایره و تعداد مماس مشترک‌های آن‌ها وضعیت دو دایره و تعداد مماس مشترک‌های آن‌ها		

زاویه مرکزی، محاطی و ظلی و نکاتشون

سه زاویه مرکزی، محاطی و ظلی و اندازه‌های آن‌ها از مباحث بسیار مهم پایه‌ای است که در زیر به آن اشاره شده است.

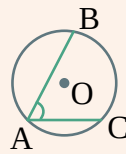
زاویه ظلی



$$\hat{A} = \frac{\widehat{AEB}}{2}$$

رأس آن روی محیط دایره، یک ضلع مماس بر دایره و ضلع دیگر وتر دایره است.

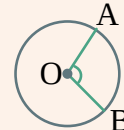
زاویه محاطی



$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

رأس آن روی محیط دایره و اضلاع آن وترهای دایره هستند.

زاویه مرکزی



$$\hat{O} = \widehat{AB}$$

رأس آن روی مرکز دایره و اضلاع آن شعاع‌های دایره هستند.

✓ خطی که بر هر دو دایره مماس است و مراکز دو دایره در یک سمت خط قرار می‌گیرند مماس مشترک خارجی دو دایره نامیده می‌شود که اگر

فاصله بین دو مرکز دایره $|OO'| = d$ باشد، طول آن از رابطه $|TT'| = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$ به دست می‌آید.

✓ اگر دو دایره مماس خارج باشند، d فاصله بین دو مرکز آن‌ها و R و R' شعاع‌های آن‌ها باشند، $d = R + R'$ است.

• چندضلعی را محاطی می‌گوییم، اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که از همه رئوس آن بگذرد، در این صورت آن دایره را دایره محیطی چندضلعی می‌نامیم و مرکز آن محل هم‌رسی عمود منصف‌های اضلاع چندضلعی است.

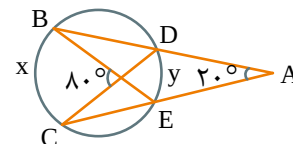
• چندضلعی را محیطی می‌گوییم، اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که بر همه ضلع‌های آن مماس باشد، دایره را محاطی می‌گوییم و مرکز آن محل هم‌رسی نیم‌سازهای زوایای چندضلعی است.

• شعاع دایره محاطی مثلثی با مساحت S و محیط $2p$ برابر $r = \frac{S}{p}$ است.

• شعاع دایره محاطی خارجی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ است.

مصحح شو:

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{2} &= 80^\circ \quad (0/25) \Rightarrow x+y=160^\circ \\ \frac{x-y}{2} &= 20^\circ \quad (0/25) \Rightarrow x-y=40^\circ \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x=100^\circ \quad (0/25) \\ y=60^\circ \quad (0/25) \end{cases}$$

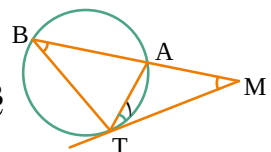


از طرفی زاویه $\widehat{DBE}$ ، زاویه محاطی مقابل به کمان DE است، پس:

$$\widehat{DBE} = \frac{\widehat{DE}}{2} = \frac{y}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \quad (0/25)$$

مصحح شو:

$$\begin{cases} \hat{T} = \hat{B} \quad (0/25) \\ \hat{M} = \hat{M} \quad (0/25) \end{cases} \xrightarrow{(zz)} \underbrace{\hat{MAT} \sim \hat{MTB}}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{\frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB}}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{MT^2 = MA \times MB}_{(0/25)}$$



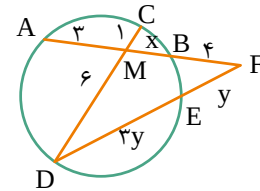
مصحح شو:

ابتدا برای دو وتر AB و CD که در نقطه M متقاطع هستند رابطه طولی را می نویسیم:

$$\underbrace{MA \times MB = MC \times MD}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{3x = 1 \times 6}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{x = 2}_{(0/25)}$$

حال برای امتداد دو وتر AB و DE که در نقطه F متقاطع هستند، رابطه طولی را می نویسیم:

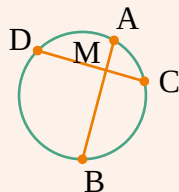
$$\underbrace{FB \times FA = FE \times FD}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{4(4+2+3) = y(y+3y)}_{(0/25)} \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow \underbrace{y = 3}_{(0/25)}$$



۲۰ شو:

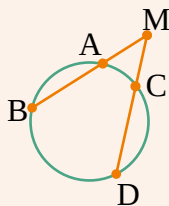
اگر دو وتر دایره، یکدیگر را در داخل و یا خارج از دایره قطع کنند، از تقاطع آنها، بین طولهای ایجاد شده روابط زیر برقرار است:

۱.۵

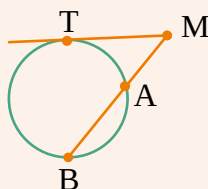


$$MA \times MB = MC \times MD$$

۵



$$MA \times MB = MC \times MD$$



$$MT^2 = MA \times MB$$

مصحح شو:

فرض کنید شعاع دایره بزرگتر برابر R و شعاع دایره کوچکتر برابر R' باشد، در این صورت:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = 3\sqrt{7} \Rightarrow \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = 3\sqrt{7} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow 8^2 - (R - R')^2 = 63 \Rightarrow \underbrace{R - R' = 1}_{(0/25)}$$

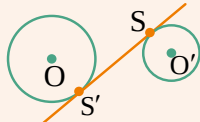
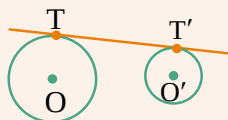
$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{15} \Rightarrow \sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{15} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow 64 - (R + R')^2 = 15 \Rightarrow \underbrace{R + R' = 7}_{(0/25)}$$

۱.۵

۶

$$\begin{cases} R + R' = 7 \\ R - R' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 4 \text{ (۰/۲۵)} \\ R' = 3 \text{ (۰/۲۵)} \end{cases}$$



طول مماس مشترک خارجی دو دایره از رابطه $|TT'| = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$

و طول مماس مشترک داخلی دو دایره از رابطه $|SS'| = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$ به دست می آید.

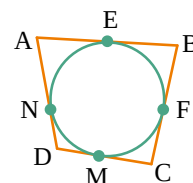
۲۰ شو:

مصحح شو:

اگر از نقطه‌ای بیرون دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم، دو پاره خط مماس هم‌اندازه‌اند. (۰/۲۵) پس:

$$\begin{cases} AE = AN \\ BE = BF \\ CM = CF \\ DM = DN \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} \underbrace{(AE + BE) + (CM + DM)}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{(AN + DN) + (BF + CF)}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{AB + CD}_{(۰/۲۵)} = AD + BC$$

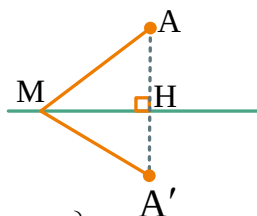


۷

مصحح شو:

طبق تعریف بازتاب: $\begin{cases} \hat{H} = 90^\circ \\ AH = A'H \end{cases}$

$$\begin{cases} AH = A'H \text{ (۰/۲۵)} \\ MH = MH \text{ (۰/۲۵)} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{ضریب}} \underbrace{\triangle AMH \cong \triangle A'MH}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{AM = A'M}_{(۰/۲۵)}$$



۸

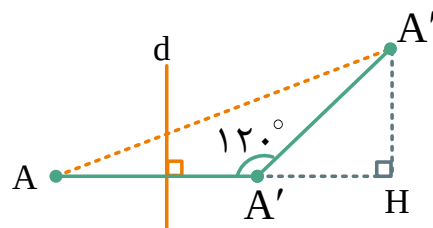
مصحح شو:

$$A'A'' = AA' = 4\sqrt{6} \text{ (۰/۲۵)}$$

$$A''\hat{A}'H = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \Rightarrow A'\hat{A}''H = 30^\circ \text{ (۰/۲۵)}$$

$$A'H = \frac{1}{2} A'A'' = 2\sqrt{6} \text{ (۰/۲۵)}$$

$$A''H = \frac{\sqrt{3}}{2} A'A'' = 2\sqrt{18} \text{ (۰/۲۵)}$$



۹

$$AH = 6\sqrt{6}$$

$$AA''^2 = AH^2 + A''H^2 \Rightarrow AA''^2 = (6\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{18})^2 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow AA'' = \sqrt{288} = 12\sqrt{2} \quad (0/25)$$

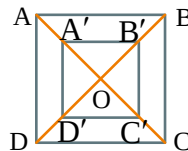
مصحح شو:

فرض کنید $S_{ABCD} = S$ و $S_{A'B'C'D'} = S'$ باشد، در این صورت:

۱.۲۵

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow S' = \frac{4}{9}S \quad (0/25)$$

$$S - S' = 5 \Rightarrow S - \frac{4}{9}S = 5 \Rightarrow \underbrace{S = 9}_{(0/25)}$$



۱۰

بنابراین: $3 \times 3 = 9$ (طول اضلاع مربع اولیه) (0/25)

محیط مربع اولیه: $4 \times 3 = 12$ (0/25)

مصحح شو:

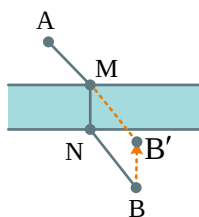
ابتدا تحت تبدیل انتقال (0/25) که بردار آن در راستای عمود بر رودخانه و طول آن برابر اندازه عرض رودخانه باشد، تصویر نقطه B را به دست می آوریم و آن را B' می نامیم. از B' به A وصل می کنیم و محل برخورد آن را با راستای رودخانه نقطه M می نامیم (0/25)، نقطه M محل احداث پل خواهد بود.

از M به راستای دیگر رودخانه عمود می کنیم و آن را N می نامیم. مسیر AMB'B کوتاه ترین مسیر است. زیرا:

$$\begin{cases} MN = BB' \\ MN \parallel BB' \end{cases}$$

$$\underbrace{AMNB = AM + MN + NB}_{(0/25)} = \underbrace{AM + BB' + MB'}_{(0/25)} = AB' + BB' = AMB'B$$

۱.۲۵



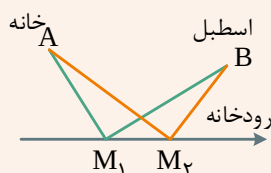
(رسم شکل 0/25)

۱۱

مسائل پیدا کردن کوتاه ترین مسیر

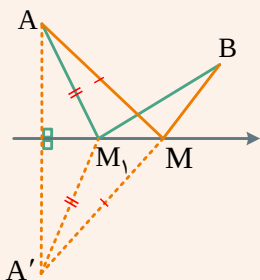
هرون، برای نخستین بار به کمک بازتاب، دستور پیدا کردن کوتاه ترین مسیر را در شرایطی خاص ارائه کرد. او با این مسئله روبه رو شده بود که:

«مردی می خواهد برای برداشتن آب از خانه به ساحل رودخانه ای که لبه مستقیمی دارد برود و بعد سطل آب را به اسطبل ببرد که در همان سمت رودخانه است. او از کدام نقطه از ساحل آب بر دارد که مسافتی که در مجموع طی می کند، کمترین حالت ممکن باشد؟»



مسئله، پیدا کردن نقطه M روی خط d است به گونه ای که $AM + MB$ کمترین مقدار ممکن باشد.

هرون ابتدا بازتاب A را نسبت به خط پیدا کرده و آن را A' نامید. خط فرضی A'B خط بازتاب را در نقطه ای مثل M قطع می کند. او مدعی شد که M جواب مسئله است و AM + MB کوتاه ترین مسیر ممکن است.

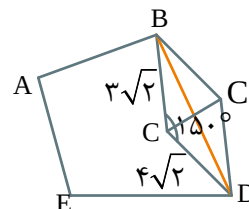


مصحح شو:

بازتاب نقطه C نسبت به خط BD را C' می نامیم، در این صورت محیط پنج ضلعی ABC'DE با محیط پنج ضلعی ABCDE برابر ولی مساحت آن بیشتر می باشد.

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BC \times CD \times \sin \hat{C} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \sin 150^\circ = 6 \quad (0/25)$$

$$2S_{\triangle BCD} = 2 \times 6 = 12 \quad (0/25) \quad \text{میزان افزایش مساحت}$$



۱۲

مصحح شو:

در مثلث AMB پاره خط MQ نیمساز زاویه AMB و در مثلث AMC پاره خط MP نیمساز زاویه AMC می باشد، لذا:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QB} \quad (0/25) \xrightarrow{MB=MC} \frac{AM}{MC} = \frac{AQ}{QB} \quad (0/25) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{AM}{MC} = \frac{AP}{PC} \quad (0/25) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC} \quad (0/25)$$

در نتیجه طبق عکس قضیه تالس $PQ \parallel BC$ (0/25).

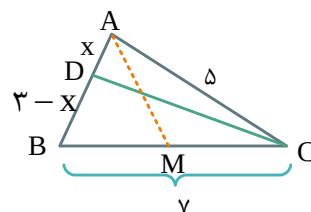
۱۳

مصحح شو:

(الف) طبق قضیه نیمسازهای داخلی داریم:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{5}{7} = \frac{x}{3-x} \Rightarrow \begin{cases} x = AD = \frac{5}{4} \quad (0/25) \\ BD = \frac{7}{4} \quad (0/25) \end{cases}$$

$$CD^2 = AC \times BC - AD \times BD = 5 \times 7 - \frac{5}{4} \times \frac{7}{4} \Rightarrow CD = \sqrt{\frac{525}{16}} = \frac{\sqrt{525}}{4} \quad (0/25)$$



۱۴

(ب) طبق قضیه میانه‌ها داریم:

$$\underbrace{2AM^2 + \frac{BC^2}{2}}_{(0/25)} = \underbrace{AC^2 + AB^2}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{2AM^2 + \frac{7^2}{2}}_{(0/25)} = 5^2 + 3^2 \Rightarrow AM = \sqrt{\frac{19}{4}} = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

$$P = \frac{5+7+3}{2} = \frac{15}{2} \Rightarrow S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad (پ)$$

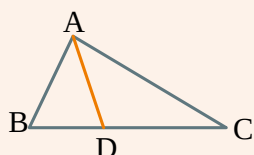
$$S = \sqrt{\frac{15}{2} \left(\frac{15}{2} - 7\right) \left(\frac{15}{2} - 5\right) \left(\frac{15}{2} - 3\right)} = \frac{15}{4} \sqrt{3} \quad (0/25)$$

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A} \Rightarrow \frac{15}{4} \sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin \hat{A} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\hat{A} \text{ منفرجه}} \hat{A} = 120^\circ \quad (0/25) \quad (ت)$$

نیمساز و داستان‌هایش...

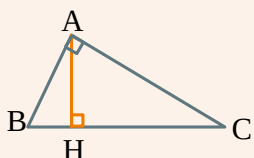
نیمساز هر زاویه، ضلع مقابلش را به نسبت اضلاع قطع می‌کند.

اگر می‌خواهید طول قطعات ایجاد شده را به دست آورید، آن‌ها را نسبتی از اضلاع در نظر بگیرید.



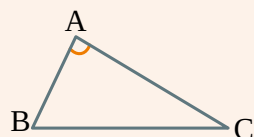
$$AD : \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

در هر مثلث دلخواه مانند ABC، مساحت از سه رابطه زیر به دست می‌آید.



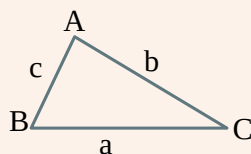
$$1) S = \frac{1}{2} (\text{ارتفاع}) (\text{قاعده})$$

$$S = \frac{1}{2} \times AH \times BC$$



$$2) S = \frac{1}{2} (\text{سینوس زاویه بین آن دو ضلع}) (\text{حاصل ضرب دو ضلع})$$

$$S = \frac{1}{2} (AB)(AC) \sin \hat{A}$$



$$3) S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad \text{از دستور هرون}$$

P محیط و 2P نصف محیط است.

دوینگ

فوری

شب

امتحان

خلاصه کامل و جامع

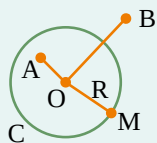
برای مرور سریع

پایه یازدهم (ریاضی)

هندسه ۲



وضعیت یک نقطه نسبت به دایره:



الف) نقطه A درون دایره $C(O, R)$ قرار دارد، اگر و تنها اگر $OA < R$ باشد.

ب) نقطه M روی دایره $C(O, R)$ قرار دارد، اگر و تنها اگر $OM = R$ باشد.

پ) نقطه B بیرون دایره $C(O, R)$ قرار دارد، اگر و تنها اگر $OB > R$ باشد.

وضعیت یک خط نسبت به دایره:

اوضاع خط و دایره		
متقاطع	مماس	مقاطع
$OH > r$	$OH = r$	$OH < r$
تعداد نقاط اشتراک = ۰	تعداد نقاط اشتراک = ۱	تعداد نقاط اشتراک = ۲

وتر در دایره:

الف) در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

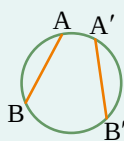
ب) در هر دایره، اگر یک قطر، وترى از آن دایره را نصف کند، آن‌گاه بر آن وتر عمود است و کمان نظیر آن وتر را نیز نصف می‌کند.

پ) در هر دایره، اگر یک قطر، کمانی از آن دایره را نصف کند، آن‌گاه بر وتر نظیر آن قطر عمود بوده و آن را نصف می‌کند.

ویژگی‌های وتر:

الف) در یک دایره، دو وتر برابر یکدیگرند، اگر و تنها اگر کمان‌های آن‌ها برابر باشند.

$$AB = A'B' \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{A'B'}$$



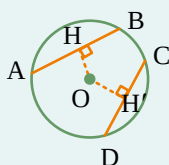
ب) در یک دایره، دو وتر برابر یکدیگرند، اگر و تنها اگر فاصله مرکز دایره از آن‌ها برابر باشد.

$$AB = A'B' \Leftrightarrow OH = OH'$$



از دو وتر نامساوی در دایره، آن‌که بزرگتر است، کمان بزرگتر دارد و به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس. در شکل زیر اگر $AB > CD$ ، آن‌گاه:

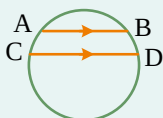
$$AB > CD \Leftrightarrow \widehat{AB} > \widehat{CD} \Leftrightarrow OH < OH'$$



کمان‌های محصور بین دو وتر موازی:

دو وتر از یک دایره موازی‌اند، اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آن‌ها مساوی باشد.

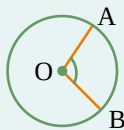
$$AB \parallel CD \Leftrightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$





زاویه مرکزی:

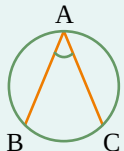
زاویه مرکزی، زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع است و دو ضلع آن شعاع‌های دایره هستند و اندازه این زاویه برابر با کمان روبه‌روی آن است.



$$\hat{AOB} = \widehat{AB} \text{ مرکزی}$$

زاویه محاطی:

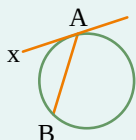
زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند. اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف اندازه کمان روبه‌روی آن است.



$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

زاویه ظلی:

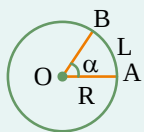
زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن شامل وتر از دایره و ضلع دیگر آن مماس بر دایره است. اندازه هر زاویه ظلی برابر نصف اندازه کمان روبه‌روی آن است.



$$\hat{BAX} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

طول کمانی از دایره:

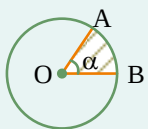
طول یک کمان با اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان، رابطه مستقیم دارد. در شکل مقابل، اگر L اندازه کمان AB باشد، داریم:



$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{L}{2\pi R} \Rightarrow L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$$

مساحت قطاعی از دایره:

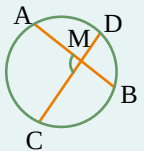
مساحت یک قطاع با اندازه زاویه مرکزی آن قطاع، رابطه مستقیم دارد. در شکل مقابل، اگر S مساحت قطاع هاشور خورده باشد، داریم:



$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{S}{\pi R^2} \Rightarrow S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$$

زاویه بین دو وتر:

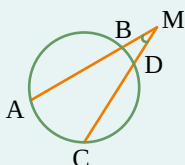
اگر دو وتر AB و CD در نقطه M درون دایره متقاطع باشند، آن‌گاه داریم:



$$\hat{M} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$$

زاویه بین امتداد دو وتر:

اگر دو وتر AB و CD یکدیگر را در نقطه M خارج دایره قطع کنند، آن‌گاه داریم:

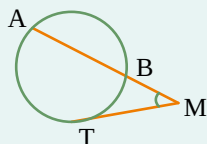


$$\hat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BD}}{2}$$



زاویه بین مماس و امتداد یک وتر:

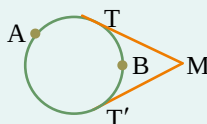
اگر امتداد وتر AB، خط مماس بر دایره را در نقطه M قطع کند، آن گاه داریم:



$$\hat{M} = \frac{AT - BT}{2}$$

زاویه بین دو مماس:

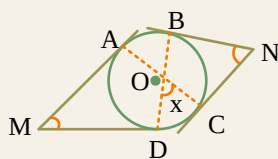
اگر از نقطه M، دو مماس MT و MT' را بر دایره رسم کنیم، آن گاه داریم:



$$\hat{M} = \frac{TAT' - TBT'}{2}$$

توجه:

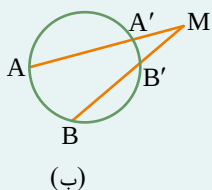
در شکل مقابل، زاویه x میانگین زاویه $\hat{M}$ و $\hat{N}$ است.



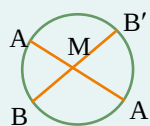
$$x = \frac{\hat{M} + \hat{N}}{2}$$

وترهای متقاطع:

اگر دو وتر درون دایره یا امتداد دو وتر در بیرون دایره، متقاطع باشند، آن گاه حاصل ضرب دو قطعه یک وتر با حاصل ضرب دو قطعه وتر دیگر برابر است.



(ب)

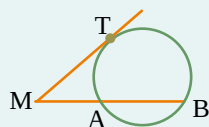


(الف)

$$MA \times MB = MA' \times MB'$$

قاطع و مماس:

اگر از یک نقطه خارج دایره‌ای، مماس و قاطعی بر دایره رسم شود، آن گاه مربع طول مماس با حاصل ضرب دو قطعه قاطع برابر است.



$$MT^2 = MA \times MB$$



حالت‌های دو دایره نسبت به هم:

دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را با فرض $OO' = d$ در نظر می‌گیریم. حالت‌های مختلفی که این دو دایره می‌توانند نسبت به هم داشته باشند، به صورت زیر است:

	$d > R + R'$	دو دایره برون هم (متخارج)
	$d = R + R'$	دو دایره مماس برون
	$ R - R' < d < R + R'$	دو دایره متقاطع
	$d = R - R' $	دو دایره مماس درون
	$d < R - R' $	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دو دایره هم‌مرکز

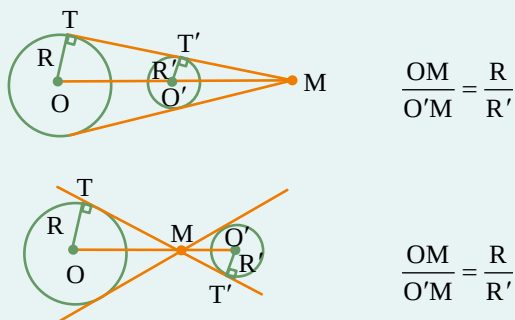
مماس مشترک دو دایره:

وضعیت	متخارج	مماس خارج	متقاطع	مماس داخل	متداخل
شکل					
تعداد مماس مشترک‌های داخلی	۲	۱	۰	۰	۰
تعداد مماس مشترک‌های خارجی	۲	۲	۲	۱	۰

مماس مشترک داخلی	مماس مشترک خارجی
$L' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$	$L = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$

همرسی مماس مشترک‌های دو دایره و خط‌المركزین:

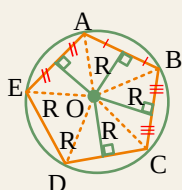
اگر شعاع‌های دو دایره نابرابر باشند، آن‌گاه مماس مشترک‌های خارجی و خط‌المركزین دو دایره هم‌رس‌اند. همچنین مماس مشترک‌های داخلی و خط‌المركزین دو دایره هم‌رس‌اند. نقطه هم‌رسی مماس مشترک‌های خارجی یا داخلی و خط‌المركزین، خط‌المركزین دو دایره را به نسبت شعاع‌ها تقسیم می‌کند.



چندضلعی محاطی:

چندضلعی را محاطی می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که از همه رئوس آن بگذرد، در این صورت دایره را دایره محاطی آن چندضلعی می‌نامیم.

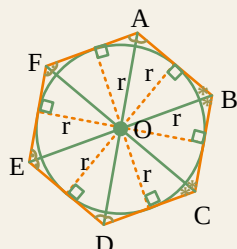
نتیجه: یک چندضلعی محاطی است، اگر و تنها اگر عمودمنصف‌های همه ضلع‌های آن در یک نقطه، هم‌رس باشند.



چندضلعی محیطی:

چندضلعی را محیطی می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که بر همه اضلاع آن مماس باشد، در این صورت دایره را دایره محاطی آن چندضلعی می‌نامیم.

نتیجه: یک چندضلعی محیطی است، اگر و تنها اگر نیم‌سازهای داخلی همه زاویه‌های آن در یک نقطه هم‌رس باشند.

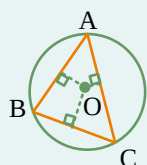


نکته طلایی

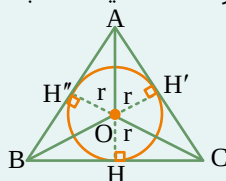
اگر مساحت یک چندضلعی محیطی برابر S ، محیط آن $2P$ و شعاع دایره محاطی آن r باشد، آن‌گاه $r = \frac{S}{P}$.

دایره‌های محیطی و محاطی مثلث:

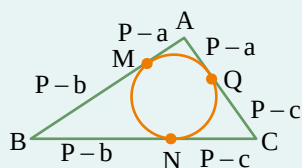
الف) عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث هم‌رس‌اند و نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها تنها نقطه‌ای است که از سه رأس یک مثلث به یک فاصله است، پس اگر دایره‌ای به مرکز نقطه تلاقی سه عمودمنصف به شعاع فاصله این نقطه تا یک رأس رسم کنیم، این دایره از هر سه رأس مثلث می‌گذرد، یعنی دایره محیطی مثلث است.



ب) نیم‌سازهای زوایای داخلی هر مثلث هم‌رس‌اند و نقطه هم‌رسی نیم‌سازها از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است. مرکز دایره محاطی داخلی مثلث، نقطه هم‌رسی سه نیم‌ساز است و شعاع دایره که با r نمایش داده می‌شود، فاصله این نقطه از هر یک از سه ضلع مثلث است. اگر S مساحت و P نصف محیط مثلث باشد، شعاع دایره محاطی داخلی مثلث از رابطه $r = \frac{S}{P}$ محاسبه می‌شود.



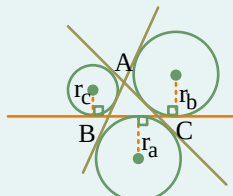
نکته طلایی



طول قطعاتی که دایره محاطی روی اضلاع مثلث می‌سازد، از روابط زیر به دست می‌آیند:
 $AM = AQ = P - a$
 $BM = BN = P - b$
 $CN = CQ = P - c$

نکته طلایی

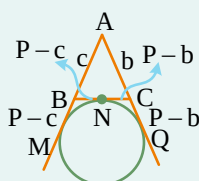
هر مثلث مطابق شکل، سه دایره محاطی خارجی دارد، اگر P نصف محیط مثلث باشد، شعاع این دایره‌ها به صورت‌های زیر به دست می‌آید:



$$r_a = \frac{S}{P - a} \quad r_b = \frac{S}{P - b} \quad r_c = \frac{S}{P - c}$$

نکته طلایی

در مثلث ABC، طول قطعاتی که دایره محاطی خارجی نظیر ضلع BC روی این ضلع و امتداد دو ضلع دیگر می‌سازد، از روابط زیر به دست می‌آیند:



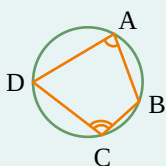
$$BM = BN = P - c$$

$$CQ = CN = P - b$$

$$AM = AQ = P$$

چهارضلعی محاطی:

یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر هر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند.



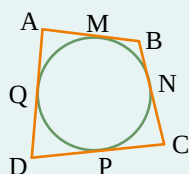
$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \Leftrightarrow \text{چهارضلعی } ABCD \text{ محاطی است.}$$

توجه:

بین چهارضلعی‌های معروف، مربع، مستطیل و دوزنقه متساوی‌الساقین همواره محاطی‌اند.

چهارضلعی محیطی:

یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل برابر با مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشد، بنابراین، در شکل روبه‌رو داریم:



$$AB + DC = AD + BC \Leftrightarrow \text{چهارضلعی } ABCD \text{ محیطی است.}$$

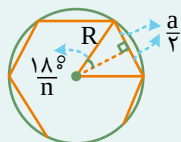
توجه:

بین چهارضلعی‌های معروف، مربع، لوزی و کایت همواره محیطی‌اند.

چندضلعی‌های منتظم:

یک چندضلعی محدب را منتظم می‌نامند، هرگاه تمام ضلع‌های آن هم‌اندازه و تمام زاویه‌های آن نیز هم‌اندازه باشند. به عنوان مثال مثلث متساوی‌الاضلاع سه ضلعی منتظم و مربع چهارضلعی منتظم است.

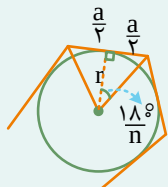
نکته طلایی



اگر n ضلعی منتظمی به ضلع a و مساحت S درون دایره به شعاع R محاط شده باشد، آن گاه:

$$a = 2R \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \quad S = n\left(\frac{1}{2} \times R \times R \times \sin \frac{360^\circ}{n}\right)$$

نکته طلایی



اگر n ضلعی منتظمی به ضلع a و مساحت S بر دایره‌ای به شعاع r محیط شده باشد، آن گاه:

$$a = 2r \cdot \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \quad S = n\left(\frac{r \cdot a}{2}\right)$$

فصل دوم:

تبدیل و ویژگی‌های آن‌ها:

تبدیل‌ها می‌توانند موقعیت (جایگاه شکل در صفحه) یا اندازه شکل را تغییر دهند.

به تبدیل‌های بازتاب، دوران و تجانس تبدیل‌های هندسی می‌گوییم.

تبدیل: تبدیل T در صفحه P ، تابعی است که به هر نقطه A از صفحه P ، دقیقاً یک نقطه مانند A' را از صفحه P نظیر می‌کند و برعکس.

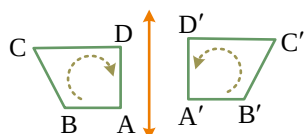
هر نقطه A' از صفحه P ، تصویر دقیقاً یک نقطه A از صفحه P است.

طولپایی (ایزومتري): تبدیل‌هایی که طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند، تبدیلات طولپا (ایزومتري) می‌نامند. به عبارتی اگر داشته باشیم $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ ، آن گاه داریم: $AB = A'B'$

نقطه ثابت تبدیل: در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل یافته آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود، نقطه ثابت تبدیل می‌نامند.

تبدیل همانی: تبدیل T را تبدیل همانی گوئیم، هرگاه به ازای هر نقطه A از صفحه P داشته باشیم: $T(A) = A$

ویژگی‌های بازتاب نسبت به خط:



ویژگی‌های بازتاب نسبت به خط

(۱) بازتاب نسبت به خط، ایزومتري است، یعنی پاره‌خط و تبدیل یافته‌اش، هم‌اندازه‌اند.

(۲) بازتاب شیب‌پا نیست یعنی شیب خط را لزوماً حفظ نمی‌کند، بازتاب تنها در صورتی شیب خط را حفظ می‌کند که خط موازی با محور بازتاب یا عمود بر آن باشد.

(۳) بازتاب نسبت به خط، جهت‌پا نیست.

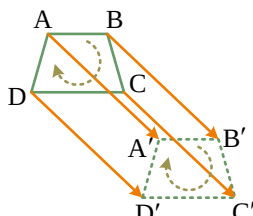
(۴) در بازتاب محوری، اندازه زاویه‌ها ثابت می‌ماند.

(۵) در بازتاب نسبت به یک خط، شکل و تصویرش با هم هم‌نهشت هستند.

(۶) اگر نقطه A' تصویر نقطه A تحت بازتاب نسبت به خط d باشد، نقطه A نیز تصویر نقطه A' تحت بازتاب نسبت به خط d محسوب می‌شود، یعنی اگر S یک تبدیل بازتاب باشد و داشته باشیم $S(A) = A'$ ، آن گاه $S(A') = A$ خواهد بود.

ABCD ساعتگرد و $A'B'C'D'$ پادساعتگرد

ویژگی‌های انتقال



(۱) انتقال، طول‌پا (ایزومتري) است.

(۲) انتقال، شیب‌پا است.

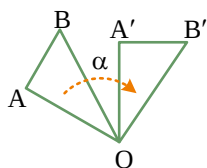
(۳) انتقال، جهت‌پا است.

(۴) در انتقال، اندازه زاویه ثابت می‌ماند.

(۵) یک شکل و انتقال یافته‌اش همواره هم‌نهشت هستند.

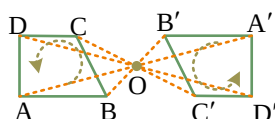


ویژگی‌های دوران



- ۱) دوران ایزومتري است، یعنی طول پاره‌خط را ثابت نگه می‌دارد.
- ۲) دوران شیب‌پا نیست، یعنی شیب خط را الزاماً حفظ نمی‌کند مگر آن‌که α مضرب صحیحی از ۱۸۰° باشد.
- ۳) در دوران، شکل و تصویرش همنهشت و هم‌جهت هستند و اندازه زاویه‌ها نیز حفظ می‌شود.
- ۴) مرکز دوران روی عمودمنصف پاره‌خطی قرار دارد که نقطه و تصویرش را به هم وصل می‌کند.

ویژگی‌های تجانس



- ۱) تجانس ایزومتري (طول‌پا) نیست به جز حالتی که $k = \pm ۱$ باشد.
- ۲) تجانس شیب‌پا و جهت‌پا است و اندازه زاویه را ثابت نگه می‌دارد.
- ۳) شکل و مجانس آن با هم متشابه‌اند و نسبت متشابه در دو شکل برابر $|k|$ است.
- ۴) نسبت مساحت‌های شکل و مجانس آن برابر $k^۲$ است.
- ۵) در تجانس، خط‌هایی که هر نقطه را به مجانس آن وصل می‌کنند، در مرکز تجانس هم‌رسند (همگی از مرکز تجانس می‌گذرند).

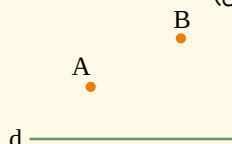
نکته طلایی

۱. در حالتی که $k > ۰$ باشد، تجانس مستقیم و در حالتی که $k < ۰$ باشد، تجانس معکوس است.
۲. در حالتی که $|k| > ۱$ باشد، تجانس انبساط و در حالتی که $|k| < ۱$ باشد، تجانس انقباض است.
۳. ترکیب دو تبدیل بازتاب نسبت به دو خط متقاطع $d_۱$ و $d_۲$ معادل با تبدیل دوران به مرکز محل برخورد دو خط با زاویه دوران دو برابر زاویه بین خطوط است.
۴. ترکیب دو تبدیل بازتاب نسبت به دو خط موازی $d_۱$ و $d_۲$ ، معادل با تبدیل انتقال به اندازه دو برابر فاصله عمود بر راستای این دو خط است.

مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر:

مثال:

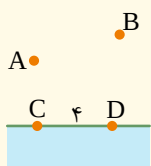
در شکل مقابل، نقطه M را روی خط d طوری پیدا کنید که طول $AM + MB$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. (مسئله هرون)



مرحله ۱: بازتاب یکی از نقطه‌ها را نسبت به خط d می‌یابیم. (نقطه A' بازتاب نقطه A نسبت به خط d است.)	مرحله ۲: از نقطه A' به نقطه B وصل می‌کنیم تا خط d را در نقطه M قطع کند.	مرحله ۳: مسیر کوتاه‌ترین AMB پیدا می‌شود.

مثال:

دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه‌ای واقع‌اند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به طوری که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این ۴ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر ACDB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟

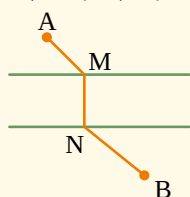




مرحله ۱: بازتاب نقطه A نسبت به رودخانه را می‌نامیم. از نقطه B به اندازه ۴ کیلومتر، موازی با رودخانه، به طرف A حرکت می‌کنیم تا به نقطه B' برسیم (انتقال)	مرحله ۲: از نقطه A' به نقطه B' وصل می‌کنیم تا ساحل بالایی رودخانه را در نقطه C قطع کند.	مرحله ۳: از نقطه C به اندازه ۴ کیلومتر در ساحل رودخانه و به سمت B، حرکت می‌کنیم، تا نقطه D به دست آید.	مرحله ۴: مسیر مورد نظر، همان مسیر ACDB است.

مثال:

دو شهر A و B دو طرف رودخانه‌ای قرار دارند. چگونه می‌توان جاده‌ای از A به B ساخت، به طوری که پل MN بر راستای رودخانه عمود گردد و مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟



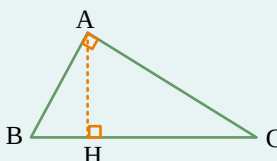
مرحله ۱: نقطه B را به اندازه عرض رودخانه، در راستای عمود بر رودخانه، انتقال می‌دهیم تا نقطه B' به دست آید.	مرحله ۲: از نقطه B' به نقطه A وصل می‌کنیم تا کناره بالایی رودخانه را در نقطه M قطع کند.	مرحله ۳: از نقطه M عمودی بر کناره دیگر رودخانه رسم می‌کنیم تا نقطه N مشخص شود.	مرحله ۴: مسیر AMNB، مسیر مورد نظر است.

فصل سوم:

روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه:

$$AH^2 = BH \times HC$$

$$AH \times BC = AB \times AC$$

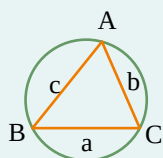


$$AB^2 = BC \times BH$$

$$AC^2 = BC \times CH$$

قضیه سینوس‌ها:

در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌روی آن برابر است با قطر دایره محیطی مثلث. به عبارت دیگر در مثلث ABC، همواره:

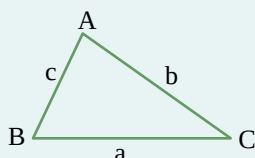


$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R \Rightarrow a = 2R \sin \hat{A}, b = 2R \sin \hat{B}, c = 2R \sin \hat{C}$$

(R شعاع دایره محیطی مثلث است.)

قضیه کسینوس‌ها:

در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل‌ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آن‌ها.



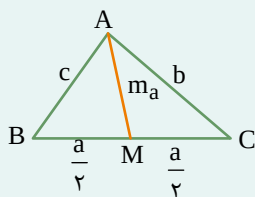
$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos \hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2a.c.\cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2a.b.\cos \hat{C} \end{cases}$$





قضیه میانه‌ها:

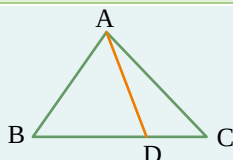
در هر مثلث، مجموع مربعات هر دو ضلع برابر است با دو برابر مربع میانهٔ نظیر ضلع سوم به علاوهٔ نصف مربع ضلع سوم. به عنوان مثال در مثلث ABC داریم:



$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \\ a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2} \\ a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2} \end{cases}$$

قضیه استوارت:

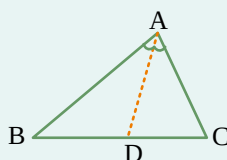
در مثلث ABC، اگر نقطهٔ دلخواه D روی ضلع BC قرار داشته باشد، آن‌گاه داریم:



$$AB^2 \times CD + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times CD \times BC = BC(AD^2 + BD \times CD)$$

قضیه نیمسازهای زوایای داخلی:

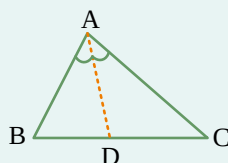
در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های دو ضلع دیگر مثلث تقسیم می‌کند.



$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

محاسبهٔ طول نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث:

در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل‌ضرب اندازه‌های دو ضلع آن زاویه منهای حاصل‌ضرب اندازهٔ دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.



$$AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$$

محاسبهٔ طول نیمساز یک زاویه برحسب اندازهٔ زاویه و اندازهٔ اضلاع آن زاویه:

اگر d_a ، d_b و d_c به ترتیب طول نیمسازهای نظیر زوایای A، B و C باشند، آن‌گاه داریم:

$$d_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$$

$$d_b = \frac{2ac \cos \frac{B}{2}}{a+c}$$

$$d_c = \frac{2ab \cos \frac{C}{2}}{a+b}$$

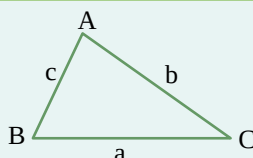
قضیه هرون:

اگر a، b و c طول اضلاع مثلث و $P = \frac{a+b+c}{2}$ نصف محیط مثلث باشد، مساحت مثلث از رابطهٔ زیر که رابطهٔ هرون نامیده می‌شود، به دست می‌آید:

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

مساحت مثلث به کمک نسبت‌های مثلثاتی:

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازه‌های دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع:



$$S = \frac{1}{2} b \cdot c \sin \hat{A} = \frac{1}{2} a \cdot c \sin \hat{B} = \frac{1}{2} a \cdot b \sin \hat{C}$$

فوت و فن تشریحی نویسی

تمام نکات و اشتباهات احتمالی در تشریحی نویسی

پایه یازدهم (ریاضی)
هندسه ۲



نکات مهم امتحانات تشریحی درس هندسه یازدهم



هدف از این آزمون، آمادگی کامل شما برای مواجهه با فضای واقعی امتحان و پرهیز از اشتباهاتی است که معمولاً باعث از دست رفتن نمره امتحانی خواهند شد.

توصیه‌های مهم:

با دقت بخوانید.

سعی کنید که صورت سوالات را با دقت بخوانید. گاهی فقط با تغییر یک کلمه، مفهوم سوال کاملاً عوض می‌شود.

مدیریت زمان داشته باشید.

سعی کنید که زمان را بین سوالات تقسیم کنید و روی یک سوال، بیش از حد وقت صرف نکنید.

صیاد باشید.

همه سوالات را بررسی کنید و ابتدا به سراغ حل سوالات آسانتر بروید. این کار اعتماد به نفس شما را بالا خواهد بود.

مرتب و خوانا بنویسید.

یادتان باشد، مصحح اگر نتواند پاسخ شما را بخواند، قطعاً به آن قسمت نمره نخواهد داد، حتی اگر چیزی که نوشته باشید، درست باشد.

مرور پاسخ‌ها را فراموش نکنید.

خیلی از وقت‌ها پیش می‌آید که پاسخی را اشتباه نوشته‌ایم اما با مرور پاسخ‌ها متوجه اشتباهاتمان می‌شویم.

اشتباهات رایج که باید از آن‌ها پرهیز کنیم:

۱. مراحل حل را به صورت کامل بنویسید و هیچ مرحله‌ای را جا نیندازید (جامپ نکنید) چرا که در اکثر مواقع، به مسیر حل نمره تعلق می‌گیرد و نه جواب نهایی!

۲. اگر سوالی نیاز به نوشتن فرمول دارد، حتماً فرمول را در پاسخنامه وارد کنید.

۳. سعی کنید که با تمرین زیاد، اشتباهات محاسباتی خود را کاهش دهید. جابه‌جایی یک علامت منفی با مثبت، کل مسیر حل و حتی جواب نهایی را تغییر می‌دهد.

۴. اگر سوالی نیاز به رسم شکل، جدول و یا نمودار داشته باشد، حتماً آن را با دقت و وسواس کامل در پاسخبرگ وارد کنید.

۵. جواب نهایی را داخل کادر قرار دهید و یا زیر آن خط بکشید.

در نهایت یادتان باشد که در امتحانات تشریحی (برخلاف آزمون تستی)، فقط پاسخ درست ملاک نیست بلکه به مسیر حل و نحوه رسیدن به جواب، نمره تعلق می‌گیرد. امتحان تشریحی یعنی شما باید استدلال، فرمول، مراحل حل و نتیجه‌گیری را به روشنی بنویسید.

با آرزوی موفقیت

گروه ریاضی ماز

