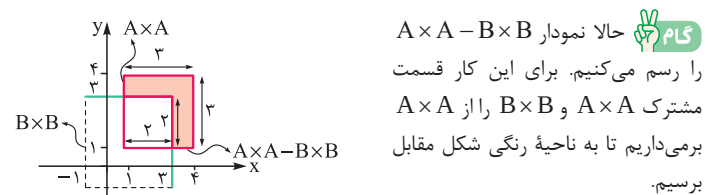
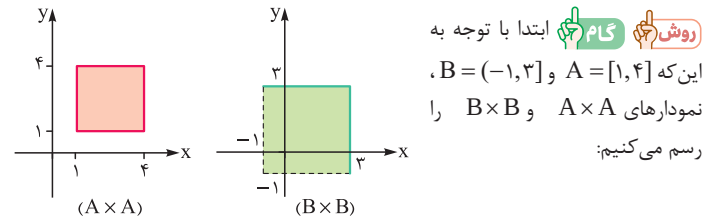


۱۳۹۹ سراسری خارج

نام درس	دهم	یازدهم	دوازدهم	ترکیبی	آسان	متوسط	سخت
ریاضیات	۵	۱۰	۱۴	۱۱	۳	۲۲	۱۵
فیزیک	۸	۱۰	۱۷	-	۱	۲۵	۹
شیمی	۶	۹	۹	۶	۵	۲۰	۵

ریاضیات

۱- گزینه ۲



گام ۲: با توجه به شکل بالا، برای محاسبه مساحت نمودار $A \times A - B \times B$ (قسمت رنگی) کافی است، مساحت مربع به ضلع ۲ را از مربع به ضلع ۳ کم کنیم:

$$S_{\text{رنگی}} = (3 \times 3) - (2 \times 2) = 9 - 4 = 5$$

روش ۲:

★ نکته اگر A و B دو بازه باشند، در این صورت:

- ۱ مساحت نمودار $A \times B$ برابر می‌شود با: (طول بازه A) $\times$ (طول بازه B): $S(A \times B) = (A \text{ بازه}) \times (B \text{ بازه})$
- ۲ مساحت نمودار $A \times B - C \times D$ برابر است با: $S(A \times B - C \times D) = S(A \times B) - S[(A \cap C) \times (B \cap D)]$

گام ۱: با توجه به مورد (۲) نکته بالا، داریم:

$$S(A \times A - B \times B) = S(A \times A) - S[(A \cap B) \times (A \cap B)] (*)$$

گام ۲: طول بازه $A = [1, 4]$ برابر $4 - 1 = 3$ واحد است، پس مساحت $A \times A$ طبق مورد (۱) نکته برابر $3 \times 3 = 9$ می‌شود.

گام ۳: اشتراک بازه‌های $A = [1, 4]$ و $B = (-1, 3]$ بازه $[1, 3]$ می‌شود، پس $A \cap B = [1, 3]$. بنابراین طول بازه $A \cap B$ برابر $3 - 1 = 2$ واحد و در نتیجه مساحت $(A \cap B) \times (A \cap B)$ طبق مورد (۱) نکته، برابر $2 \times 2 = 4$ می‌شود.

گام ۴: چیزهایی را که در گام‌های (۲) و (۳) به دست آوردیم؛ در رابطه (*) جای گذاری می‌کنیم:

$$S(A \times A - B \times B) = 9 - 4 = 5$$

۲- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ جدول ارزش n گزاره، 2^n سطر (حالت) دارد. مثلاً جدول ارزش گزاره p و q ، $2^2 = 4$ سطر (حالت) دارد، ببینید:

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

۲ جدول ارزش نقیض گزاره p (یا همان $\sim p$)

p	$\sim p$
T	F
F	T

به صورت مقابل است:

۳ جدول ارزش گزاره‌های $p \wedge q$ (همون p و q ، $p \vee q$ (همون p یا q) و $p \Rightarrow q$ (همون p آنگاه q) به صورت مقابل هستند:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

۴ بعضی از قوانین جبر گزاره‌ها را در زیر ببینید:

- (الف) $p \wedge \sim p \equiv F$ (ب) $p \vee F \equiv p$
 (پ) $\sim(\sim p) \equiv p$ (ت) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
 (ث) $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee (q \wedge r)$

روش ۱: گام ۱: جدول ارزش گزاره $(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee q)$ را رسم می‌کنیم:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee q)$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	F

گام ۲: همان‌طور که در جدول بالا می‌بینید، ستون گزاره $(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee q)$ و ستون گزاره p کاملاً یکسان است، پس این دو گزاره هم‌ارز هستند.

روش ۲: گام ۱: سؤال را با قوانین جبر گزاره‌ها حل می‌کنیم. اول هم‌ارز گزاره $\sim p \Rightarrow \sim q$ را پیدا می‌کنیم:

$$\sim p \Rightarrow \sim q \stackrel{\text{مورد (پ-۴) درس‌نامه}}{\equiv} (\sim p) \vee (\sim q) \stackrel{\text{مورد (ب-۴) درس‌نامه}}{\equiv} p \vee \sim q$$

گام ۲: پس به جای $\sim p \Rightarrow \sim q$ در گزاره اصلی می‌توانیم $p \vee \sim q$ را بنویسیم:

$$(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$$

$$\stackrel{\text{مورد (ث-۴) درس‌نامه}}{\equiv} p \vee (\underbrace{\sim q \wedge q}_F) \equiv p \vee F \equiv p$$

مشاوره جبر مجموعه‌ها جزء مباحث پرتکرار در کنکور سراسری است که سؤالات آن را به راحتی می‌توانید با رسم جدول ارزش گزاره‌ها یا استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها حل کنید.

۳- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $ax + b$ برابر $p(-\frac{b}{a})$ است.

۲ اگر چندجمله‌ای $p(x)$ بر $ax + b$ بخش‌پذیر باشد، $p(-\frac{b}{a}) = 0$ می‌شود.

گام ۱: $p(x)$ بر $2x - 1$ بخش‌پذیر است، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه داریم:

$$p(\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow \frac{p(x)=2x^4+ax^3+2x^2-3x}{2x-1} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{a}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{2} = 1 \Rightarrow a+1=2 \Rightarrow a=1$$

بنابراین ضابطه $p(x)$ به این صورت شد:

$$p(x) = 2x^4 + 1x^3 + 2x^2 - 3x$$

گام ۲: حالا باقی‌مانده $p(x)$ بر $x + 2$ را می‌خواهیم که طبق مورد (۱) درس‌نامه برابر $p(-2) = 32 - 8 + 8 - 6 = -10$ است:

۴- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ تابع گلدانی: اگر دو قدرمطلق داشته باشیم به شرطی که داخل قدرمطلق‌ها، عبارت‌های خطی با ضرایب x یکسان (یا قرینه) و بین دو قدرمطلق جمع باشد، یک تابع گلدانی داریم. فرم کلی تابع گلدانی را به صورت $y = |x - \alpha| + |x - \beta|$ در نظر می‌گیریم. برای رسم این تابع به این ترتیب عمل می‌کنیم: (الف) ریشه عبارت‌های درون دو قدرمطلق را پیدا می‌کنیم، فرض کنید این ریشه‌ها $x = \alpha$ و $x = \beta$ باشند به طوری که $\alpha > \beta$ است.

(ب) مقدار تابع در $x = \alpha$ و $x = \beta$ را به دست می‌آوریم تا دو نقطه از نمودار مشخص شود؛



گام ۴ تساوی به دست آمده را در عبارت $f^{-1}(g^{-1}(-9))$ جای گذاری می کنیم:

$$f^{-1}(g^{-1}(-9)) = f^{-1}(21)$$

حالا نوبت محاسبه $f^{-1}(21)$ است. برای این کار معادله $f(x) = 21$ را حل می کنیم:

$$f(x) = 21 \Rightarrow x^2 - 4x + 9 = 21 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=6 & \checkmark \\ x=-2 & \times \end{cases}$$

$f^{-1}(21) = 6$ پس: $x \geq 2$ است، چون خود سؤال گفته $x \geq 2$ است، پس:

بنابراین جواب برابر ۶ است.

گزینه ۲

درس نامه ۱ اگر تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم، $y = -f(x)$ و اگر $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم، $y = f(-x)$ حاصل می شود. **۲** برای قرینه کردن تابع $y = f(x)$ نسبت به مبدأ مختصات، باید آن را یک بار نسبت به محور x ها و بار دیگر نسبت به محور y ها قرینه کنیم. **۳** اگر $k > 0$ و تابع $y = f(x)$ را k واحد بالا ببریم، $y = f(x) + k$ و اگر $k < 0$ و تابع $y = f(x)$ را k واحد پایین ببریم، $y = f(x) - k$ حاصل می شود. **۴** برای پیدا کردن طول نقطه تلاقی دو تابع، کافی است ضابطه آن ها را با هم برابر قرار دهیم.

گام ۴ برای این که قرینه تابع $f(x) = (x-1)^2$ نسبت به مبدأ مختصات به دست آید، طبق مورد (۲) درس نامه، باید آن را یک بار نسبت به محور x ها و بار دیگر نسبت به محور y قرینه کنیم:

$$y = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} y = -(x-1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} y = -((-x)-1)^2 = -(-x-1)^2 = -(x+1)^2$$

گام ۴ حالا اگر منحنی $y = -(x+1)^2$ را ۴ واحد به سمت بالا انتقال دهیم، $y = -(x+1)^2 + 4$ حاصل می شود.

گام ۴ برای پیدا کردن طول نقطه تلاقی منحنی اخیر، یعنی $y = -(x+1)^2 + 4$ و منحنی اصلی، یعنی $y = (x-1)^2$ ، کافی است ضابطه آن ها را با هم برابر قرار دهیم:

$$-(x+1)^2 + 4 = (x-1)^2 \Rightarrow -x^2 - 2x - 1 + 4 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

گزینه ۳

استراتژی با توجه به این که $\cot \hat{C} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ است، فرض می کنیم $CH = \sqrt{5}x$ و $AH = 2x$. حالا با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث ACH ، مقدار x و طول ارتفاع AH حاصل می شود.

درس نامه ۱ در هر مثلث قائم الزویه داریم:

$$\sin \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC}, \quad \cos \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{AB}{AC}, \quad \cot \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{AC}{AB}$$

۲ اگر $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ باشد، می توانیم فرض کنیم $\square = ax$ و $\square = bx$ است، برای مثال $m = 2x$ ، $n = 3x$ اگر $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$ باشد، داریم:

گام ۴ در مثلث ACH داریم:

$$\cot \hat{C} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{CH}{AH} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

مورد (۲) درس نامه $\left\{ \begin{array}{l} CH = \sqrt{5}x \\ AH = 2x \end{array} \right.$

گام ۴ حالا در مثلث ACH از قضیه فیثاغورس استفاده می کنیم:

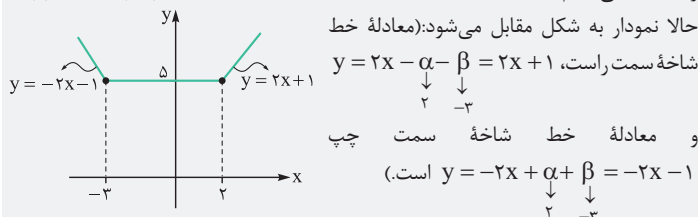
$$AH^2 + CH^2 = AC^2 \xrightarrow{AH=2x, CH=\sqrt{5}x} 4x^2 + 5x^2 = 9x^2 \Rightarrow 9x^2 = (3 \times 32)^2 \Rightarrow 9x^2 = 9 \times 32^2 \Rightarrow x^2 = 32^2 \Rightarrow x = 32$$

بنابراین طول AH برابر $AH = 2x = 2 \times 32 = 64$ می شود.

پ این دو نقطه را به هم وصل می کنیم (شیب خطی که بین این دو نقطه رسم می شود صفر است). بعد سمت راست $x = \alpha$ خطی با شیب ۲ (معادله خط شاخه سمت راست $y = 2x - \alpha - \beta$ است) و سمت چپ $x = \beta$ خطی با شیب -۲ (معادله خط شاخه سمت چپ، $y = -2x + \alpha + \beta$ است). رسم می کنیم.

مثلاً برای رسم $f(x) = |x-2| + |x+3|$ داریم:

ریشه های عبارت های درون قدرمطلق $x = 2$ و $x = -3$ هستند. مقدار تابع در این دو نقطه را حساب می کنیم:



یک راه ساده تر هم برای به دست آوردن معادله خط شاخه سمت راست و چپ داریم: به این صورت که برای به دست آوردن معادله خط شاخه سمت راست، هر دو قدرمطلق را مثبت و برای به دست آوردن معادله خط شاخه سمت چپ، هر دو قدرمطلق را منفی در نظر بگیریم.

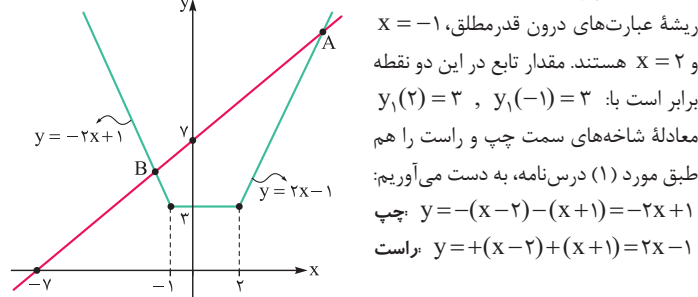
۲ برای به دست آوردن مختصات نقطه تقاطع دو خط $y = ax + b$ و $y = cx + d$ ، کافی است دستگاه دو معادله و دو مجهول مقابل را حل کنیم:

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases}$$

۳ فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

گام ۴ $y_1 = |x-2| + |x+1|$ یک تابع گلدانی و $y_2 = x + 7$ یک خط است. نمودار این دو تابع را رسم می کنیم. برای رسم خط $y_2 = x + 7$ کافی است به این توجه کنیم که عرض از مبدأ خط $y = 7$ و محل برخوردش با محور x ها، نقطه ای به طول $x = -7$ است.



گام ۴ با توجه به نمودار رسم شده، برای به دست آوردن مختصات نقطه A ، کافی است محل تقاطع دو خط $y = x + 7$ و $y = 2x - 1$ را به دست آوریم:

کافی است محل تقاطع دو خط $y = x + 7$ و $y = -2x + 1$ را به دست آوریم:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x + 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} A(8, 15)$$

$$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = x + 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} B(-2, 5)$$

گام ۴ در آخر، فاصله دو نقطه A و B را به دست می آوریم:

$$AB = \sqrt{(8 - (-2))^2 + (15 - 5)^2} = \sqrt{100 + 100} = \sqrt{100 \times 2} = 10\sqrt{2}$$

گزینه ۴

درس نامه برای تابع f داریم:

با توجه به تساوی های بالا، برای محاسبه $f^{-1}(\alpha)$ کافی است معادله $f(x) = \alpha$ را حل کنیم که جوابش همان خواسته ما، یعنی $f^{-1}(\alpha)$ می شود.

گام ۴ ابتدا باید حاصل $g^{-1}(-9)$ را به دست آوریم که طبق درس نامه، برای به دست آوردن آن کافی است معادله $g(x) = -9$ را حل کنیم:

$g(x) = -9 \Rightarrow \frac{3-x}{2} = -9 \Rightarrow 3-x = -18 \Rightarrow x = 21 \Rightarrow g^{-1}(-9) = 21$



درس نامه ۱ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا برای $\sin$ و $\cos$ به صورت زیر هستند:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

۲ برای حل معادلات مثلثاتی به جدول زیر توجه کنید:

$\sin \bigcirc = \sin \square \Rightarrow$	$\begin{cases} \bigcirc = 2k\pi + \square \\ \bigcirc = 2k\pi + (\pi - \square) \end{cases}$
$\cos \bigcirc = \cos \square \Rightarrow$	$\begin{cases} \bigcirc = 2k\pi + \square \\ \bigcirc = 2k\pi - \square \end{cases}$
$\tan \bigcirc = \tan \square \Rightarrow$	$\bigcirc = k\pi + \square$

گام ۱ ابتدا با استفاده از مورد (۱) درس نامه، $\sin(x + \frac{\pi}{6})$ و $\cos(x + \frac{\pi}{3})$ را ساده می‌کنیم:

$$\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$$

با جای گذاری دو تساوی بالا در معادله اصلی داریم:

$$\sin(x + \frac{\pi}{6}) + \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \cos x$$

گام ۲ حالا جواب‌های معادله بالا را به کمک مورد (۲) درس نامه به دست می‌آوریم:

$$\cos 2x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow 3x = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

اگر تعدادی از جواب‌های این دو معادله را بنویسیم، می‌بینیم که جواب‌های $x = 2k\pi$ ،

زیرمجموعه جواب‌های $x = \frac{2k\pi}{3}$ هستند؛ ببینید:

$$\begin{cases} x = 2k\pi \Rightarrow x = \dots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \dots \\ x = \frac{2k\pi}{3} \Rightarrow x = \dots, -2\pi, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi, \frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, 4\pi, \dots \end{cases}$$

پس جواب کلی معادله، $x = \frac{2k\pi}{3}$ می‌شود.

تیزبازی با جای گذاری $x = \frac{\pi}{3}$ در معادله اصلی داریم:

$$\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) + \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) = \cos(2 \times \frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{2\pi}{3}) = \cos(\frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow 1 = 0$$

تساوی به دست آمده نادرست است، پس $x = \frac{\pi}{3}$ جزء جواب‌های مسئله نیست. حالا در (۲)

به ازای $k=1$ و در (۳) و (۴) به ازای $k=0$ به جواب $x = \frac{\pi}{3}$ می‌رسیم، پس این ۳ گزینه نادرست‌اند و جواب درست (۱) می‌شود.

گزینه ۳ - ۱۰

استراتژی اعضای چند دسته دیگر را هم بنویسید تا به یک الگوی درجه دوم برای جمله آخر هر دسته برسید.

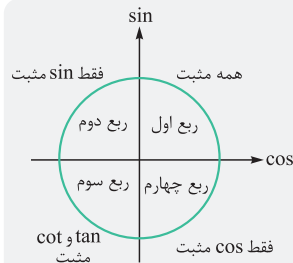
درس نامه الگوی درجه دوم، اگر اختلاف جملات یک الگو، تشکیل دنباله‌ای حسابی دهند، با یک الگوی درجه دوم با جمله عمومی $t_n = an^2 + bn + c$ مواجه هستیم که a ، برابر نصف قدرنسبت آن دنباله حسابی (دنباله حسابی‌ای که اختلاف جملات تشکیل می‌دهند)، است و برای محاسبه b و c ، از خود جملات استفاده می‌کنیم. برای مثال در الگوی زیر، اختلاف جملات، تشکیل دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۴ می‌دهند:

$$1, 7, 17, 31, \dots$$

$$\begin{matrix} & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\ +6 & +10 & +14 & \end{matrix}$$

گزینه ۸ - ۸

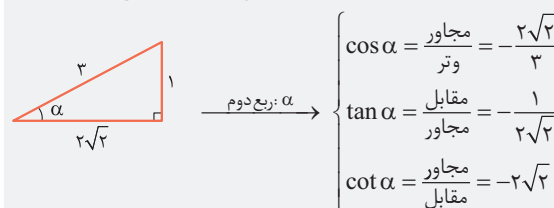
درس نامه ۱ علامت نسبت‌های مثلثاتی



مختلف را در دایره مثلثاتی مقابل ببینید:

۲ وقتی یکی از نسبت‌های مثلثاتی را (فرقی ندارد کدام) داشته باشیم، می‌توانیم با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه و استفاده از فیثاغورس، مقدار عددی مابقی نسبت‌ها را هم به دست آوریم و برای فهمیدن علامت آن نسبت‌ها، از دایره مثلثاتی کمک می‌گیریم.

برای مثال اگر $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ و α در ربع دوم باشد، ضلع مقابل به زاویه α را برابر ۱ و وتر را برابر ۳ در نظر می‌گیریم. حالا به کمک فیثاغورس، طول ضلع سوم $2\sqrt{2}$ می‌شود:



۳ برای به دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی، وقتی زاویه داخل کمان بزرگ باشد، از نکات زیر استفاده می‌کنیم:

(الف) برای $\tan$ و $\cot$ می‌توانیم هر مضرب صحیح دلخواهی از π را اضافه یا کم کنیم.

(ب) برای $\sin$ و $\cos$ ، اگر مضرب زوجی از π را اضافه و کم کنیم، اتفاقی نمی‌افتد، اما اگر مضرب فردی از π را اضافه یا کم کنیم، نسبت قرینه می‌شود.

۴ نسبت‌های مثلثاتی مجموع یا تفاضل دو کمان به صورت زیر هستند:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

گام ۱ ابتدا با استفاده از مورد (۳) درس نامه، $A = \sin(\frac{13\pi}{4} + \alpha)$ را ساده می‌کنیم:

$$\sin(\frac{13\pi}{4} + \alpha) = \sin(\frac{12\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \alpha) = \sin(3\pi + \frac{\pi}{4} + \alpha) \Rightarrow A = -\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)$$

مضرب فرد π

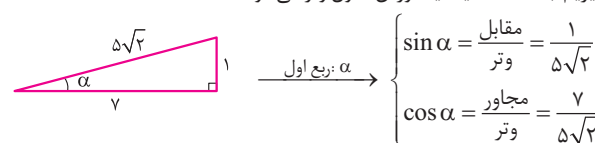
گام ۲ حالا $A = -\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ را با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل

$$A = -\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) = -(\underbrace{\sin \frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \cos \alpha + \underbrace{\cos \frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \sin \alpha)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha) \quad (*)$$

گام ۳ باید مقدار $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ را محاسبه کنیم، برای همین با توجه به این که $\tan \alpha = \frac{1}{7}$

است، مثلثی قائم‌الزاویه رسم می‌کنیم و ضلع مقابل به زاویه α را برابر ۱ و ضلع مجاور به آن را ۷ در نظر می‌گیریم. با کمک قضیه فیثاغورس، طول وتر می‌شود $5\sqrt{2}$ ، $\sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.



گام ۴ در آخر با جای گذاری $\sin \alpha = \frac{1}{5\sqrt{2}}$ و $\cos \alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}}$ در تساوی (*), مقدار A را به دست می‌آوریم:

$$A = -\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2} (\frac{1}{5\sqrt{2}} + \frac{7}{5\sqrt{2}}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{8}{5\sqrt{2}} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$$

گزینه ۹ - ۹

استراتژی با استفاده از روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا، $\sin(x + \frac{\pi}{6})$ و

$\cos(x + \frac{\pi}{3})$ را ساده کنید، بعد به یک معادله مثلثاتی ساده می‌رسید که جواب آن به راحتی به دست می‌آید.



گام ۷ حالا با توجه به این که $۹۶ = ۲^۵ \times ۳$ است؛ $\log_3 ۹۶$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_3 ۹۶ = \log_3 (۲^۵ \times ۳) = \log_3 ۲^۵ + \log_3 ۳ = ۵ \log_3 ۲ + \log_3 ۳ = (۵ \times ۰/۳) + ۰/۴۸ = ۱/۹۸$$

با جای گذاری $\log_3 ۹۶ = ۱/۹۸$ در تساوی $t, (*)$ را حساب می‌کنیم:

$$t(1/98 - 2) = 0 - 0/48 \Rightarrow -0/98t = -0/48 \Rightarrow t = 24$$

۱۲- گزینه ۲

استراتژی کافی است به این نکته توجه کنید که حاصل ۳^{-2n+1} در $x \rightarrow +\infty$ برابر صفر می‌شود.

درس‌نامه برای محاسبه حد در بی‌نهایت توابع نمایی به شکل $y = a^x$ داریم:

(الف) اگر $a > 1$ باشد، نمودار تابع نمایی به شکل مقابل است که با توجه به آن، حاصل حد a^x وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر صفر می‌شود:

برای مثال: $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{4+2n} = 3^{-\infty} = 0$

(ب) اگر $0 < a < 1$ باشد، نمودار تابع نمایی به شکل مقابل است که با توجه به آن، حاصل حد a^x وقتی $x \rightarrow +\infty$ برابر صفر می‌شود:

برای مثال: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{3})^{n+2} = (\frac{1}{3})^{+\infty} = 0$

با توجه به مورد (۱) درس‌نامه داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n}}{2 \times 3^{2n}} = \frac{1}{2}$$

بنابراین:

۱۳- گزینه ۱

استراتژی اول از هم‌ارزی‌های مثلثاتی برای کسینوس استفاده کنید، بعد هوپیتال بزنید.

درس‌نامه ۱ اگر $u \rightarrow 0$ ، می‌توانیم از هم‌ارزی زیر استفاده کنیم:

$$1 - \cos u \approx \frac{u^2}{2}$$

۲ یکی از سریع‌ترین روش‌ها برای رفع ابهام صفرصفر، استفاده از قاعده هوپیتال است، به این صورت که اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ باشد، داریم (به جای صورت، مشتق آن و به جای مخرج هم، مشتق آن را قرار می‌دهیم):

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

۳ مشتق تابع $\sqrt{u}$ به صورت $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ است.

گام ۸ با جای‌گذاری $x = 0$ ، به صفرصفر می‌رسیم، پس باید رفع ابهام کنیم. چون $x \rightarrow 0^-$ ، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، می‌توانیم از هم‌ارزی زیر کمک بگیریم:

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow 1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2} \Rightarrow \sqrt{1 - \cos x} = \sqrt{\frac{x^2}{2}} = \frac{|x|}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{1 - \cos x} = -\frac{x}{\sqrt{2}} \quad x < 0 \text{ است، پس } |x| = -x \text{ می‌شود، بنابراین:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{-\frac{x}{\sqrt{2}}}$$

گام ۹ برای محاسبه حاصل حد بالا، هوپیتال می‌زنیم:

$$\stackrel{\text{Hop}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{3}{2\sqrt{2+3x}} - \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{-1}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{4}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -2$$

بنابراین یک الگوی درجه دوم با جمله عمومی $t_n = an^2 + bn + c$ داریم که در آن $a = \frac{4}{2} = 2$ است.

حالا برای پیدا کردن b و c ، به جای n ، ۱ و ۲ را قرار می‌دهیم:

$$t_n = 2n^2 + bn + c \Rightarrow \begin{cases} n=1 \rightarrow t_1 = 2 + b + c \\ n=2 \rightarrow t_2 = 8 + 2b + c \end{cases}$$

جملات اول و دوم الگو ۱ و ۷ بودند، پس:

$$\begin{cases} 1 = 2 + b + c \\ 7 = 8 + 2b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = -1 \\ 2b + c = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

بنابراین جمله عمومی الگو $1 - 2n^2$ است.

گام ۱۰ اعضای چند دسته دیگر را هم می‌نویسیم:

$$\{1\}, \{3, 5\}, \{7, 9, 11\}, \{13, 15, 17, 19\}, \{21, 23, 25, 27, 29\}, \dots$$

دسته دوم دسته سوم دسته چهارم دسته پنجم

دنباله جملات آخر دسته‌ها به صورت مقابل است:

$$1, 5, 11, 19, 29, \dots$$

$+4 \quad +6 \quad +8 \quad +10$

اختلاف جملات، تشکیل دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۲ می‌دهند، پس الگوی درجه دوم با جمله عمومی $t_n = an^2 + bn + c$ داریم.

گام ۱۱ در این الگو $a = \frac{2}{2} = 1$ است، حالا برای پیدا کردن b و c ، به جای n ، ۱ و ۲ را قرار می‌دهیم:

$$t_n = n^2 + bn + c \Rightarrow \begin{cases} n=1 \rightarrow t_1 = 1 + b + c \\ n=2 \rightarrow t_2 = 4 + 2b + c \end{cases}$$

جملات اول و دوم الگو ۱ و ۵ بودند، پس:

$$\begin{cases} 1 = 1 + b + c \\ 5 = 4 + 2b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ 2b + c = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

بنابراین جمله عمومی الگو به این صورت شد:

گام ۱۲ جمله آخر واقع در دسته شماره چهار را می‌خواهیم، پس کافی است t_4 را محاسبه کنیم:

$$t_4 = 4 \times 4 + 4 - 1 = 16 + 4 - 1 = 19$$

مشاوره در سؤالاتی که با دسته‌بندی اعداد طبیعی، اعداد زوج، اعداد فرد یا ... مواجه هستیم، به احتمال زیاد جملات آخر دسته‌ها یا جملات اول دسته‌ها، الگوی درجه دوم تشکیل می‌دهند.

۱۱- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ بعضی از قوانین لگاریتم را در زیر ببینید:

می‌توانیم از طرفین یک تساوی، در مبنای دلخواه (ولی برابر)، لگاریتم بگیریم:

(الف) $\bigcirc = \square \Rightarrow \log_a \bigcirc = \log_a \square$

(ب) $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$ **(پ)** $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$

(ت) $\log_a a = 1$ **(ث)** $\log_a 1 = 0$

(ج) $\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a$

۲ برای از بین بردن توان در یک تساوی نمایی، کافی است از طرفین در مبنای دلخواه (مبنای لگاریتم دو طرف باید یکسان باشد) لگاریتم بگیریم تا توان تبدیل به ضریب شود؛ یک نمونه ببینید:

$$a^x = b^y \xrightarrow{\text{لگاریتم در مبنای } c} \log_c a^x = \log_c b^y \Rightarrow x \log_c a = y \log_c b$$

گام ۱۳ هر روز ۴ لیتر از محلول را برداشته و به جای آن، آب خالص اضافه می‌کنیم، یعنی

هر روز غلظت محلول $\frac{96}{100}$ برابر می‌شود، بنابراین می‌توانیم بگوییم پس از گذشت t روز، غلظت محلول $(\frac{96}{100})^t$ برابر می‌شود. می‌خواهیم ببینیم پس از گذشت چند روز، غلظت $\frac{1}{3}$ برابر می‌شود، پس کافی است معادله مقابل را حل کنیم:

گام ۱۴ طبق مورد (۲) درس‌نامه، برای حل معادله بالا از دو طرف تساوی در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم تا توان تبدیل به ضریب شود:

$$\begin{aligned} (\frac{96}{100})^t &= \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{مورد (۱-الف) درس‌نامه}} \log_{10} (\frac{96}{100})^t = \log_{10} (\frac{1}{3}) \\ &\xrightarrow{\text{مورد (۱-ج) درس‌نامه}} t \log_{10} (\frac{96}{100}) = \log_{10} (\frac{1}{3}) \\ &\xrightarrow{\text{مورد (۲-ب) درس‌نامه}} t (\log_{10} 96 - \log_{10} 100) = \log_{10} 1 - \log_{10} 3 \quad (*) \end{aligned}$$



گام ۱ اگر فرض کنیم $h(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$ است، $g(x) = f(h(x))$ و در نتیجه $g'(x) = h'(x) \cdot f'(h(x))$ می‌شود (طبق درس‌نامه). حالا با جای‌گذاری $x = \frac{\pi}{6}$ در تساوی اخیر داریم:

گام ۲ مقدار $h(\frac{\pi}{6})$ را محاسبه می‌کنیم:

$$h(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \Rightarrow h(\frac{\pi}{6}) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow f'(h(\frac{\pi}{6})) = f'(\frac{1}{3}) \quad (I)$$

گام ۳ مشتق تابع h را محاسبه می‌کنیم:

$$h(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \Rightarrow h'(x) = \frac{-\cos x(1 + \sin x) - (1 - \sin x) \times \cos x}{(1 + \sin x)^2}$$

حالا مقدار $h'(\frac{\pi}{6})$ را به دست می‌آوریم:

$$h'(\frac{\pi}{6}) = \frac{-\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{-\frac{4\sqrt{3}}{4}}{\frac{9}{4}} = -\frac{4\sqrt{3}}{9} \quad (II)$$

گام ۴ با جای‌گذاری (I) و (II) در (*) داریم:

$$g'(\frac{\pi}{6}) = h'(\frac{\pi}{6}) \cdot f'(h(\frac{\pi}{6})) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{4\sqrt{3}}{9} \times f'(\frac{1}{3}) \Rightarrow f'(\frac{1}{3}) = -\frac{3}{4}$$

۱۷- گزینه ۴

شفاف‌سازی این‌که در صورت سؤال گفته دو منحنی در یک نقطه مشترک به طول ۴، بر یک خط مماس‌اند، یعنی دو منحنی در $x = 4$ مماس‌مشترک دارند.

استراتژی اول فرض کنید $f(x) = x\sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 + ax + b$ باشد، بعد دو معادله $f(4) = g(4)$ و $f'(4) = g'(4)$ را حل کنید.

درس‌نامه ۱ اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول $x = \alpha$ مماس‌مشترک داشته باشند، دو شرط زیر باید برقرار باشد:

(الف) مقدارشان در آن نقطه برابر است: $f(\alpha) = g(\alpha)$

(ب) شیب مماس‌هایشان در آن نقطه برابر است: $f'(\alpha) = g'(\alpha)$

۲ فرمول مشتق بعضی از توابع را در زیر ببینید:

تابع	فرمول مشتق
عدد ثابت	۰
ax^n	anx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f \cdot g$	$f'g + fg'$

گام ۱ ابتدا فرض می‌کنیم $f(x) = x\sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 + ax + b$ است. طبق شفاف‌سازی دو تابع f و g در $x = 4$ مماس‌مشترک دارند، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه باید تساوی‌های $f(4) = g(4)$ و $f'(4) = g'(4)$ برقرار شوند.

گام ۲ تساوی $f(4) = g(4)$ را تشکیل می‌دهیم تا به یک رابطه بین a و b برسیم:

$$f(4) = g(4) \Rightarrow 4 \times 2 = 16 + 4a + b \Rightarrow 4a + b = -8 \quad (I)$$

گام ۳ ضابطه مشتق دو تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مقدار مشتق f در $x = 4$ برابر است با:

$$f'(4) = 1 \times 2 + 4 \times \frac{1}{4} = 3$$

حالا برویم سراغ g : $g(x) = x^2 + ax + b \Rightarrow g'(x) = 2x + a \Rightarrow g'(4) = 8 + a$

گام ۴ حالا معادله $f'(4) = g'(4)$ را هم تشکیل می‌دهیم تا مقدار a به دست بیاید:

$$f'(4) = g'(4) \Rightarrow 3 = a + 8 \Rightarrow a = -5$$

حالا $a = -5$ را در تساوی (I) جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار b هم مشخص شود:

$$4(-5) + b = -8 \Rightarrow -20 + b = -8 \Rightarrow b = 12$$

۱۴- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ تابع $y = [x]$ ، در همه نقاط با طول صحیح ناپیوسته است. **۲** توابع به شکل $y = f(x)[x]$ ، در نقاط با طول صحیح ناپیوسته هستند، مگر در نقاط صحیح که حاصل $f(x)$ در آن‌ها صفر شود، برای مثال تابع $y = (x^2 - 4)[x]$ ، در همه نقاط صحیح به جز $x = 2$ و $x = -2$ ناپیوسته است زیرا حاصل $x^2 - 4$ در $x = 2$ و $x = -2$ برابر صفر می‌شود. **۳** حاصل $\sin x$ در $x = k\pi$ برابر صفر می‌شود. ($k \in \mathbb{Z}$)

با توجه به مورد (۳) درس‌نامه، حاصل $\sin \pi x$ در نقاط صحیح برابر صفر می‌شود، پس تابع $f(x) = [x] \sin \pi x$ همواره پیوسته می‌شود. (بنا بر بیشتر برات توضیح بدم). $[x]$ فقط توی نقاط صحیح ناپیوسته می‌شه، حالا تو مورد (۲) درس‌نامه گفتیم آگه $f(x)$ توی به سری از نقاط صحیح صفر بشه، $y = f(x)[x]$ توی اون نقاط صحیح، پیوسته می‌شه. توی تابع ما یعنی $f(x) = [x] \sin \pi x$ ، $\sin \pi x$ توی همه نقاط صحیح صفر می‌شه، پس تابع f هم توی همه نقاط صحیح پیوسته می‌شه!

۱۵- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ اگر $x = k$ ریشه مخرج تابع کسری $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ باشد ولی ریشه صورتش نباشد، می‌توانیم بگوییم $x = k$ ، مجانب قائم تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ است.

۲ هم‌ارزی پرتوان: برای محاسبه حد در بی‌نهایت یک تابع کسری (مثلاً $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$)، کافی است در صورت و مخرج، فقط جمله با بزرگ‌ترین توان x را نگه دارید و بقیه جملات را حذف کنید، برای مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 10x^2 + 3}{7x^3 + 2x - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3}{7x^3} = \frac{5}{7}$$

۳ برای به دست آوردن مجانب افقی یک تابع، کافی است حاصل حد در بی‌نهایت آن را محاسبه کنید.

۴ اگر $x = k$ ریشه مضاعف معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c$ باشد، دو اتفاق رخ می‌دهد:

(الف) $k = -\frac{b}{2a}$ است. (ب) مقدار $ax^2 + bx + c$ به ازای $x = k$ برابر صفر می‌شود.

تابع f فقط یک مجانب قائم دارد و مخرج آن درجه دوم است، پس دو حالت داریم:

حالت اول: $x = 2$ ریشه مضاعف مخرج باشد که در این صورت با توجه به مورد (۴) درس‌نامه داریم:

$$2x^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{4} = 2 \Rightarrow b = -8 \\ 4 + 2b + c = 0 \xrightarrow{b=-8} 4 - 16 + c = 0 \Rightarrow c = 12 \end{cases}$$

بنابراین ضابطه تابع تا این‌جا به صورت $f(x) = \frac{ax^2 + 7x}{2x^2 - 8x + 12}$ می‌شود. $f(3) = 6$ است، پس:

$$\frac{9a + 21}{18 - 24 + 12} = 6 \Rightarrow 9a + 21 = 12 \Rightarrow 9a = -9 \Rightarrow a = -1$$

بنابراین $f(x) = \frac{-x^2 + 7x}{2x^2 - 8x + 12}$ می‌شود. حالا به کمک مورد (۲) و (۳) درس‌نامه، مجانب افقی f را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 7x}{2x^2 - 8x + 12} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

تا همین‌جا ما به جواب رسیدیم و نیازی به بررسی حالت دوم نیست، اما بد نیست بدانید حالت دوم این است که صورت و مخرج ریشه مشترک داشته باشند، یعنی این‌که مخرج ریشه $x = 2$ و $x = \alpha$ را داشته باشد و $x = \alpha$ ریشه صورت هم باشد.

۱۶- گزینه ۲

استراتژی اول از دو طرف معادله $g(x) = f(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x})$ مشتق بگیریم؛ بعد به جای x قرار دهید $\frac{\pi}{6}$.

درس‌نامه فرمول مشتق بعضی از توابع را در مقابل ببینید:

تابع	فرمول مشتق
عدد ثابت	۰
$\sin x$	$\cos x$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$
$f(g(x))$	$g'(x) \cdot f'(g(x))$



۱۸- گزینه ۱

استراتژی برای محاسبه $f'(2)$ سراغ ضابطه بالایی و برای محاسبه $f'(5)$ سراغ ضابطه پایینی بروید.

درس نامه ۱ برای محاسبه مقدار مشتق یک تابع، اگر براکت (جزء صحیح) دیدیم، اولین کار این است که آن را از بین ببریم، یعنی به جای براکت، مقدار عددی عبارتش را قرار دهیم.

۲ مشتق $\sqrt{u}$ به صورت $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ است.

کام ۱ $x=2$ در ضابطه بالایی تابع قرار دارد، پس برای محاسبه $f'(2)$ از این ضابطه مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 6x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x}} = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x}} \Rightarrow f'(2) = \frac{5}{4}$$

کام ۲ $x=5$ در ضابطه پایینی تابع قرار دارد. برای محاسبه $f'(5)$ باید از ضابطه زیر

$$f(x) = \left[\frac{x}{4}\right](x^2 - 9x)$$

مشتق بگیریم: در ضابطه تابع، براکت داریم، پس اولین کار این است که آن را از بین ببریم. مقدار $\left[\frac{x}{4}\right]$ به ازای $x=5$ برابر 1 است، پس با جای‌گذاری داریم:

$$f(x) = 1 \times (x^2 - 9x) \Rightarrow f'(x) = 2x - 9 \Rightarrow f'(5) = 1$$

کام ۳ پس $f'(2) - f'(5) = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$ می‌شود.

۱۹- گزینه ۳

استراتژی فرض کنید $\hat{A}OB = \alpha$ و $\hat{TOB} = \beta$ باشد حاصل $\tan \beta$ را می‌خواهیم و مقدار $\tan(\alpha + \beta)$ و $\tan \alpha$ را داریم که با استفاده از فرمول $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$ به راحتی به جواب می‌رسیم.

درس نامه ۱ طول شعاع دایره مثلثاتی برابر ۱ است.

۲ فرمول مجموع و تفاضل دو کمان برای $\tan$ به صورت زیر است:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

کام ۱ به شکل سؤال توجه کنید:

$BT=2$ و شعاع دایره ۱ است، پس $AO=1$ و $AB=1$ می‌شود. (دقت کنید AB برابر شعاع OC است.)

کام ۲ فرض می‌کنیم $\hat{A}OB = \alpha$ و $\hat{TOB} = \beta$ باشد. حالا داریم:

$$\tan \hat{A}OB = \frac{AB}{AO} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan \hat{A}OT = \frac{AT}{AO} \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \frac{3}{1} = 3$$

باجای‌گذاری $\tan(\alpha + \beta) = 3$ و $\tan \alpha = 1$ در رابطه $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$ مقدار $\tan \beta$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Rightarrow 3 = \frac{1 + \tan \beta}{1 - \tan \beta} \Rightarrow 3 - 3 \tan \beta = 1 + \tan \beta \Rightarrow 2 = 4 \tan \beta \Rightarrow \tan \beta = \frac{1}{2}$$

۲۰- گزینه ۲

کام ۱ تابع $f(x)$ بدون قدرمطلق به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2-1}(x^2-4) & x^2-4 \geq 0 \\ -\frac{x^2}{x^2-1}(x^2-4) & x^2-4 < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x^2}{x^2-1} & x^2-4 \geq 0 \\ -\frac{x^2-4x^2}{x^2-1} & x^2-4 < 0 \end{cases}$$

حالا باید نامعادله‌های $x^2-4 \geq 0$ و $x^2-4 < 0$ را حل کنیم:

$$x^2-4 \geq 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) \geq 0 \xrightarrow{\text{نابین ریشه‌ها}} x \leq -2 \text{ یا } x \geq 2$$

$$x^2-4 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) < 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} -2 < x < 2$$

پس در نهایت ضابطه $f(x)$ بدون قدرمطلق، به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x^2}{x^2-1} & x \leq -2 \text{ یا } x \geq 2 \\ -\frac{x^2-4x^2}{x^2-1} & -2 < x < 2 \end{cases}$$

کام ۲ چون ضابطه بالایی و پایینی فقط در یک منفی اختلاف دارند، محاسبه مشتق یکی از ضابطه‌ها کافی است؛ ما این‌جا مشتق ضابطه بالایی $\left(\frac{x^2-4x^2}{x^2-1}\right)$ را به کمک رابطه

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\frac{2x(2x^2-4)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x[(2x^2-4)(x^2-1) - (x^2-4x^2)(x^2-1)]}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2x[2x^4 - 2x^2 - 4x^2 + 4 - x^4 + 4x^2]}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x^4 - 2x^2 + 4)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2x(x^4 - 2x^2 + 1 + 3)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x((x^2-1)^2 + 3)}{(x^2-1)^2}$$

بنابراین $f'(x)$ برابر می‌شود با:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x((x^2-1)^2 + 3)}{(x^2-1)^2} & x \leq -2 \text{ یا } x \geq 2 \\ -\frac{2x((x^2-1)^2 + 3)}{(x^2-1)^2} & -2 < x < 2 \end{cases}$$

کام ۳ عبارت $((x^2-1)^2 + 3)$ همواره مثبت است و نقشی در تعیین علامت f' ندارد. از طرفی $(x^2-1)^2$ هم نامنفی است ولی ریشه‌هایش یعنی $x = \pm 1$ را در جدول می‌آوریم. اما حواستان باشد که در آن‌ها تغییر علامتی رخ نمی‌دهد.

حالا جدول تعیین علامت f' را می‌کشیم:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
f'	-	+	+	-	-	+	
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		min		max		min	

همان‌طور که می‌بینید در نقطه‌های $x = -2$ و $x = 0$ و $x = 2$ مشتق تغییر علامت می‌دهد، پس این سه نقطه اکسترمم نسبی هستند.

مشاوره دیگر باید به محاسبات زیاد عادت کنید. یکی از ویژگی‌های پررنگ کنکورهای جدید وجود محاسبات زیاد است.

۲۱- گزینه ۴

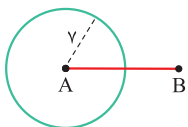
استراتژی برای نقطه C دو ویژگی بیان شده است: نقاط هر ویژگی را با کشیدن یک شکل، جداگانه پیدا می‌کنیم. نقاط برخورد این دو شکل، جواب‌های مسئله هستند.

درس نامه ۱ برای پیدا کردن نقطه‌هایی که از یک نقطه ثابت مثل O ، به فاصله R هستند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع R می‌کشیم (شکل مقابل را ببینید). هر نقطه‌ای که روی این دایره باشد، فاصله‌اش از O برابر R است.

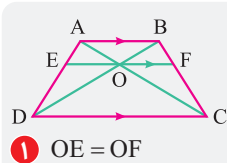
۲ برای پیدا کردن نقطه‌هایی که از خط d (شکل مقابل) به فاصله h هستند، دو خط موازی با d و به فاصله h در دو طرف آن رسم می‌کنیم. هر نقطه‌ای که روی یکی از این دو خط باشد، فاصله‌اش از d برابر h است.

حواستان باشد منظور از فاصله یک نقطه از یک پاره‌خط، فاصله آن نقطه از خط شامل آن پاره‌خط است. مثلاً در شکل روبه‌رو می‌توانیم بگوییم فاصله نقطه C از پاره‌خط AB برابر با h است.

کام ۱ (پیدا کردن نقاطی که از نقطه A به فاصله 7 هستند). برای پیدا کردن نقاطی که از نقطه A به فاصله 7 هستند، طبق مورد (۱) درس‌نامه دایره‌ای به مرکز A و شعاع 7 می‌کشیم:



۲۳- گزینه ۱



نکته مطابق شکل، اگر از نقطه O، محل برخورد قطرهای دوزنقه ABCD، خطی موازی قاعده‌های آن رسم کنیم تا ساق‌های دوزنقه را در E و F قطع کند، آن‌گاه:

$$\frac{1}{EF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$$

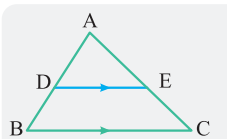
با توجه به قسمت (۲) نکته بالا، با فرض $AB = 5$ و $CD = 9$ داریم:

$$\frac{1}{EF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} \Rightarrow \frac{1}{EF} = \frac{1}{5} + \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{EF} = \frac{14}{45} \Rightarrow EF = \frac{45}{14}$$

مشاوره طراحان نکته این سؤال را خیلی دوست دارند، حتماً یاد بگیریدش.

۲۴- گزینه ۲

استراتژی اول با استفاده از قضیه تالس در مثلث ECD، مقدار x را حساب می‌کنیم؛ بعد با توجه به تشابه مثلث‌های EAB و EDC نسبت مساحت این دو مثلث را پیدا می‌کنیم؛ این‌جا می‌توانیم به کمک مورد (۲) درس‌نامه مساحت این دو مثلث را جداگانه برحسب یک پارامتر بنویسیم. در آخر با توجه به این که $S_{ABCD} = S_{EDC} - S_{EAB}$ است؛ خواسته مسئله را به دست می‌آوریم.



درس‌نامه ۱ در شکل مقابل اگر DE با BC موازی باشد، می‌توانیم بگوییم: (قضیه تالس) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (الف)

(قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (ب)

با توجه به قسمت (ب) می‌توانیم بنویسیم: $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2$ یا $\left(\frac{AE}{AC}\right)^2$ یا $\left(\frac{DE}{BC}\right)^2$

از تساوی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که $a = ck$ و $b = dk$ است. مثلاً:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{5} \Rightarrow a = 3k, b = 5k$$

گام ۱ (محاسبه مقدار x) به گفته سؤال چهارضلعی ABCD دوزنقه است، پس در شکل مقابل AB و DC موازی‌اند. بنابراین طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم از قضیه تالس کمک بگیریم:

$$\frac{EA}{AD} = \frac{EB}{BC} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{3x-4}{4} \Rightarrow 20 = x(3x-4) \Rightarrow 3x^2 - 4x - 20 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(-20)}}{2(3)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 240}}{6} = \frac{4 \pm 16}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \\ x = \frac{-12}{6} = -2 \end{cases}$$

$x = -2$ غیر قابل قبول است، چون به ازای آن طول پاره‌خط $AD = x$ عددی منفی می‌شود؛ بنابراین $x = \frac{10}{3}$.

گام ۲ (محاسبه نسبت مساحت مثلث‌های AEB و EDC): از موازی بودن AB با DC یک نتیجه دیگر هم می‌توانیم بگیریم؛ این که مثلث‌های AEB و DEC متشابه‌اند، پس نسبت مساحتشان طبق مورد (۱) درس‌نامه برابر می‌شود:

$$\frac{S_{AEB}}{S_{DEC}} = \left(\frac{EA}{ED}\right)^2 = \left(\frac{5}{5+x}\right)^2 \xrightarrow{x=\frac{10}{3}} \frac{S_{AEB}}{S_{DEC}} = \left(\frac{5}{\frac{25}{3}}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

طبق مورد (۲) درس‌نامه، از تناسب بالا می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

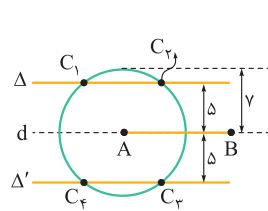
$$S_{AEB} = 9k, S_{DEC} = 25k$$

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال) حالا با کمی دقت به شکل گام (۱) می‌توانیم بگوییم رابطه $S_{ABCD} = S_{DEC} - S_{AEB}$ برقرار است، پس داریم:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{EAB}} = \frac{16k}{9k} = \frac{16}{9}$$

بنابراین خواسته سؤال برابر می‌شود با:

گام ۱ (پیدا کردن نقاطی که از پاره‌خط AB به فاصله ۵ هستند).



اگر پاره‌خط AB بر خط d واقع باشد، منظور از نقاطی که از پاره‌خط AB به فاصله ۵ هستند، همان نقاطی است که از خط d به فاصله ۵ هستند، طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌دانیم برای پیدا کردن این نقاط باید دو خط به موازات d و به فاصله ۵ از آن بکشیم. این دو خط را به شکل گام (۱) اضافه می‌کنیم (در شکل مقابل).

گام ۲ (مشخص کردن خواسته سؤال)

می‌خواهیم رأس C هم شرط گام اول را داشته باشد و هم شرط گام دوم را؛ پس C می‌تواند هر کدام از نقاط مشترک (نقاط برخورد) Δ یا Δ' با دایره به مرکز A و شعاع ۵ باشد. همان‌طور که در شکل گام دوم می‌بینید، تعداد این نقاط چهارتاست که اسمشان را C_1, C_2, C_3, C_4 گذاشته‌ایم.

حواستان باشد، طول ضلع AB در حل این سؤال بی‌تأثیر است. ما در شکل‌های بالا طول AB را بیشتر از ۵ در نظر گرفته‌ایم، اما اگر کمتر از ۵ هم در نظر بگیریم، باز هم به همین جوابی که به دست آوردیم، می‌رسیم.

تله بعضی‌ها ممکن است به اشتباه فکر کنند منظور سؤال، تعداد مثلث‌های قابل رسم ABC است که در این صورت (۲) انتخاب می‌کنند. چون در شکل گام دوم دو مثلث ABC_1 و ABC_2 با هم و دو مثلث ABC_3 و ABC_4 با هم هم‌نهشت هستند.

۲۲- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ اگر دو زاویه از یک مثلث، با دو زاویه از مثلث دیگری برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند. مثلاً در شکل روبه‌رو که دو خط d و d' با هم موازی‌اند، بنا به قضیه موازی - مورب، زاویه‌های $\hat{A}$ و $\hat{C}$ با هم و زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{D}$ با هم برابرند، پس دو مثلث OAB و OCD با هم متشابه‌اند.

برای نوشتن نسبت تشابه دو مثلث، ضلع‌های رو به رو زاویه برابر را در یک نسبت زیر هم می‌نویسیم، به طوری که در صورت نسبت‌ها اضلاع یک مثلث و در مخرج آن‌ها اضلاع مثلث دیگر قرار داشته باشند. مثلاً نسبت تشابه مثلث‌های ABC و DEC در شکل مقابل به این صورت نوشته می‌شود:

$$\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DC}$$

روبه α روبه β روبه θ

گام ۱ (تشخیص زاویه‌های برابر در شکل)

چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است، پس ضلع‌های مقابلش موازی‌اند.

حالا به کمک قضیه موازی - مورب، زاویه‌های داخل شکل را با $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ مشخص می‌کنیم.

گام ۲ (تشخیص مثلث‌های متشابه و نوشتن نسبت تشابه آن‌ها)

خوب به مثلث‌های آبی و قرمز در شکل بالا نگاه کنید. همان‌طور که می‌بینید، مثلث‌های قرمز با دو زاویه برابر γ و θ و همین‌طور مثلث‌های آبی با دو زاویه برابر α و β متشابه‌اند. حالا نسبت تشابه این مثلث‌ها را به کمک مورد (۲) درس‌نامه می‌نویسیم:

$$\frac{\frac{\text{روبه } \beta}{BE}}{\frac{\text{روبه } \alpha}{DE}} = \frac{\frac{\text{روبه } \theta}{AB}}{\frac{\text{روبه } \gamma}{DG}}, \quad \frac{\frac{\text{روبه } \theta}{BE}}{\frac{\text{روبه } \gamma}{DE}} = \frac{\frac{\text{روبه } \alpha}{EF}}{\frac{\text{روبه } \beta}{AD}}$$

(۱) (۲)

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال)

به تساوی‌های (۱) و (۲) در گام دوم دقت کنید، سمت چپ این دو تساوی با هم برابر است، پس سمت راست آن‌ها هم باید با هم برابر باشند، یعنی:

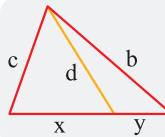
$$\frac{EA}{EG} = \frac{EF}{EA} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} EF \times EG = EA^2$$

مشاوره این سؤال عیناً در کنکور خارج از کشور ۹۴ آمده بود، پس لطفاً همه تست‌های کنکور را تمرین کنید.

۲۵ - گزینه ۲

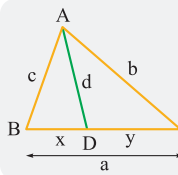
استراتژی

هر وقت با شکلی شبیه شکل روبه‌رو مواجه شدید که در آن چهارتا از پنج پارامتر d, c, x, y و معلوم بودند، برای محاسبه پارامتر پنجم، از قضیه استوارت استفاده کنید.

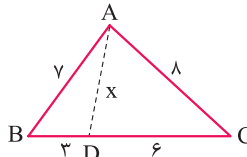


درس‌نامه

اگر نقطه D را روی ضلع BC از مثلث ABC طوری در نظر بگیریم که $AD = d$ ، $BD = x$ و $CD = y$ باشد، آن‌گاه طبق قضیه استوارت، داریم:

$$b^2x + c^2y = a(d^2 + xy)$$


همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، ۴ تا از ۵ پارامتر AB, AC, BD, DC, AD را داریم، پس طبق استراتژی، برای محاسبه پنجمی ($AD = x$) باید از قضیه استوارت در مثلث ABC استفاده کنیم:



$$AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot CD = BC(AD^2 + BD \cdot CD)$$

$$\Rightarrow (5^2 \times 3) + (4^2 \times 6) = 9(x^2 + 3 \times 6)$$

طرفین معادله را بر ۳ تقسیم می‌کنیم:

$$64 + (49 \times 2) = 3(x^2 + 18) \Rightarrow x^2 = \frac{64 + 98}{3} - 18$$

$$\Rightarrow x^2 = 54 - 18 = 36 \Rightarrow x = 6$$

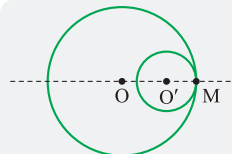
مشاوره

قضیه استوارت فرمول ترسناکی دارد! اما خوشبختانه تا الان کنکور طوری از این قضیه سؤال داده که فقط با حفظ بودن فرمول، می‌توانید سؤالش را حل کنید، پس به خاطر قیافه ترسناک، این قضیه را کنار نگذارید.

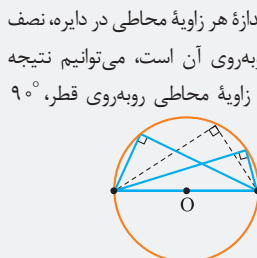
۲۶ - گزینه ۳

درس‌نامه ۱

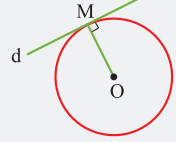
دو دایره مماس بر هم (چه مماس‌داخل چه مماس‌خارج)، نقطه تماس دو دایره، روی خط گذرنده از مرکزهای دو دایره واقع است. برای درک بهتر این موضوع شکل مقابل را ببینید:



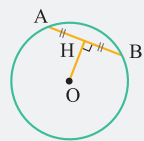
اگر مطابق شکل زیر، خط d در نقطه M بر دایره‌ای به مرکز O مماس باشد، شعاع OM بر d عمود می‌شود.



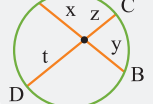
است؛ ببینید:



اگر از مرکز یک دایره، به وتر از آن عمود کنیم، پای این عمود، وتر را نصف می‌کند. مثلاً در شکل زیر، H وسط وتر AB است:

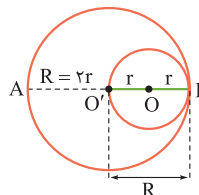
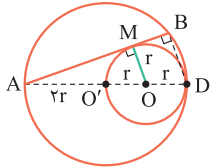


در هر دایره بین قطعه‌هایی که دو وتر در داخل دایره روی همدیگر می‌سازند (x, y, z, t در شکل مقابل)، رابطه زیر برقرار است:

$$xy = zt$$


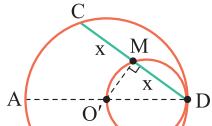
تجزیه وضعیت دو دایره

دو دایره مماس‌داخل‌اند و طبق گفته سؤال، شعاع دایره بزرگ با قطر دایره کوچک برابر است، پس مطابق شکل مقابل، دایره کوچک از مرکز دایره بزرگ عبور می‌کند.

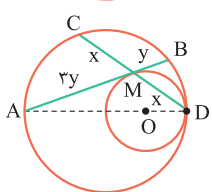
محاسبه نسبت $\frac{AM}{MB}$ 

برای این‌که شکلمان از شلوغی دربیاوریم، پاره‌خط CD را در شکل مقابل نیاوریم. از O به M وصل می‌کنیم. می‌دانیم شعاع بر مماس در نقطه تماس عمود است، پس $\angle OMA = 90^\circ$. حالا از D به B وصل می‌کنیم، زاویه $\angle ABD$ در دایره بزرگ، یک زاویه محاطی رو به قطر است، پس طبق مورد (۳) درس‌نامه، $\angle ABD = 90^\circ$. همان‌طور که از شکل پیداست، پاره‌خط‌های OM و BD هر دو بر AB عمودند، پس موازی‌اند. حالا می‌توانیم طبق مورد (۵) درس‌نامه در مثلث ABD تالس بنویسیم:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AO}{OD} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{r}{r} \Rightarrow AM = r, MB = y$$

محاسبه نسبت $\frac{MC}{MD}$ 

خوب به شکل مقابل نگاه کنید. (برای این‌که شکلمان شلوغ نشود، پاره‌خط AB را نیاوریم). از O' به M وصل می‌کنیم؛ همان‌طور که می‌بینید زاویه $\angle O'MD$ در دایره کوچک، یک زاویه محاطی رو به قطر است، پس $\angle O'MD = 90^\circ$. با توجه به شکل، در دایره بزرگ از مرکز دایره به وتر DC عمود کرده‌ایم. پس می‌توانیم بگوییم $MC = MD = x$ (مورد (۴) درس‌نامه).

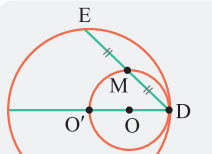


را ببینید. چیزهایی که تا این‌جا به دست آورده‌ایم را بر روی شکل می‌نویسیم. مسئله نسبت $\frac{MC}{MB} = \frac{x}{y}$ را می‌خواهد، پس بیاوریم رابطه طولی بین دو وتر AB و CD را در دایره بزرگ‌تر بنویسیم؛ تا رابطه بین x و y مشخص شود:

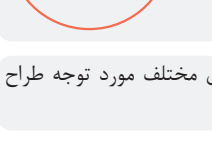
$$MC \times MD = MB \times MA \Rightarrow x \times x = y \times ry \Rightarrow x^2 = ry^2 \Rightarrow x = \sqrt{r}y$$

$$x = \sqrt{r}y \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{r}$$

بنابراین نسبت $\frac{MC}{MB} = \frac{x}{y}$ برابر می‌شود با:



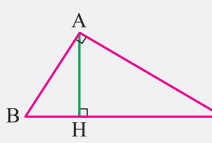
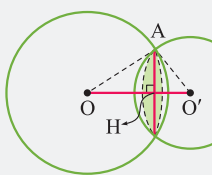
نکته در حالت کلی اگر دو دایره مماس‌داخل داشته باشیم که شعاع یکی دو برابر دیگری است، هر وتر گذرنده از نقطه تماس در دایره بزرگ، توسط دایره کوچک نصف می‌شود، یعنی در شکل روبه‌رو داریم:



مشاوره شکل این سؤال، چند بار تا الان در کنکورهای مختلف مورد توجه طراح کنکور بوده، پس خوب است نکته بالا را بلد باشید.

۲۷ - گزینه ۴

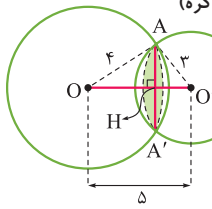
اگر دو کره متقاطع باشند، شکل حاصل از این تقاطع یک دایره است



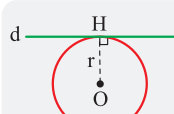
که مرکز آن بر خط‌الممرکزین دو کره واقع است. برای محاسبه شعاع این دایره (که در شکل روبه‌رو رنگی شده است). به این مطلب توجه کنید که H مرکز این دایره و نقطه‌ای واقع بر آن است، یعنی طول شعاع برابر با طول ارتفاع وارد بر ضلع AOO' است. مثلث قائم‌الزاویه ABC را به همراه ارتفاع وارد بر وترش ببینید. بین اضلاع این مثلث و طول ارتفاع وارد بر وتر، این رابطه برقرار است:

$$AH \times BC = AB \times AC$$

(رسم شکل مناسب و تشخیص شکل حاصل از تقاطع دو کره)

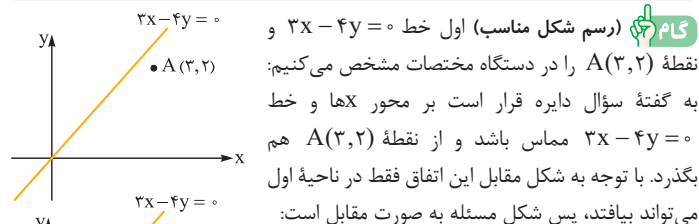


شکل مسئله به صورت مقابل است. طبق مورد (۱) درس‌نامه، تقاطع دو کره، یک دایره می‌سازد. (دایره‌ای به مرکز H و شعاع HA که در شکل روبه‌رو رنگی شده است).



۲ همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، فاصله مرکز دایره از خط مماس بر آن، برابر با شعاع دایره است:
 $OH = r$
 ۳ فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ از رابطه مقابل محاسبه می‌شود:
 $OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

۴ فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:
 $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



۵ (نوشتن مرکز دایره بر حسب شعاعش) فرض می‌کنیم شعاع دایره r باشد، در این صورت چون دایره در ناحیه اول بر محور x مماس است، طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم؛ مختصات مرکزش به صورت $O(\alpha, r)$ می‌شود.

۶ (محاسبه خواسته سؤال) نقطه $A(3, 2)$ روی دایره است، پس فاصله‌اش از مرکز دایره، یعنی $O(\alpha, r)$ برابر r است:

$$OA = r \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (r - 2)^2} = r \xrightarrow{\text{توان}} (\alpha - 3)^2 + (r - 2)^2 = r^2 \quad (1)$$

از طرفی خط $3x - 4y = 0$ هم بر دایره مماس است، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه، فاصله مرکز دایره $O(\alpha, r)$ از آن برابر r می‌شود:

$$r = \frac{|3\alpha - 4r|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow r = \frac{|3\alpha - 4r|}{5} \Rightarrow 5r = |3\alpha - 4r|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5r = 3\alpha - 4r \Rightarrow r = \frac{\alpha}{3} \text{ یا } 3r = \alpha \\ 5r = -(3\alpha - 4r) \Rightarrow r = -3\alpha \end{cases}$$

این‌جا باید حواسمان باشد که چون مرکز دایره در ناحیه اول است، پس طول مرکزش یعنی α عددی مثبت و در نتیجه $r = -3\alpha < 0$ است. بنابراین فقط رابطه $r = \frac{\alpha}{3}$ را می‌پذیریم. حالا باید رابطه $r = \frac{\alpha}{3}$ را در تساوی (۱) جای‌گذاری کنیم یا رابطه $3r = \alpha$ را. ما این‌جا برای کم‌تر شدن حجم محاسباتمان به جای α ها $3r$ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} (\alpha - 3)^2 + (r - 2)^2 &= r^2 \xrightarrow{\alpha = 3r} (3r - 3)^2 + (r - 2)^2 = r^2 \\ \Rightarrow (9r^2 - 18r + 9) + (r^2 - 4r + 4) &= r^2 \\ \Rightarrow 9r^2 - 22r + 13 &= 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}} r = 1 \text{ یا } r = \frac{13}{9} \end{aligned}$$

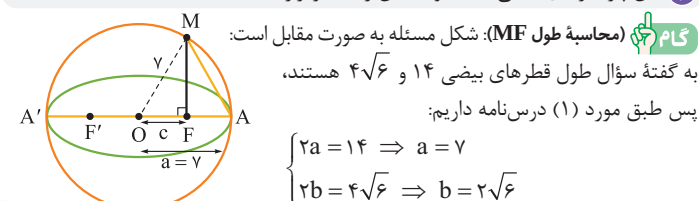
بنابراین کوچک‌ترین شعاع دایره $r = 1$ است.

۳۰- گزینه ۲

۱ درس‌نامه ۱ فاصله‌های مهم بیضی را در جدول زیر ببینید:

شکل	فاصله‌های مهم
	قطر بزرگ: $AA' = 2a$
	قطر کوچک: $BB' = 2b$
	فاصله کانونی: $FF' = 2c$
	مرکز بیضی: $O = \frac{F + F'}{2}$

۲ بین پارامترهای بیضی a ، b و c این رابطه برقرار است:
 $a^2 = b^2 + c^2$



۳ (محاسبه طول MF): شکل مسئله به صورت مقابل است:

به گفته سؤال طول قطرهای بیضی 14 و $4\sqrt{6}$ هستند، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه داریم:

$$\begin{cases} 2a = 14 \Rightarrow a = 7 \\ 2b = 4\sqrt{6} \Rightarrow b = 2\sqrt{6} \end{cases}$$

گام ۱ (تشخیص نوع مثلث AOO'): در شکل گام قبل، به مثلث AOO' توجه کنید، در این مثلث رابطه فیثاغورس برقرار است؛ یعنی $AO'^2 = AO^2 + AO'^2$ (مثلث معروف با ضلع‌های 3 ، 4 و 5). پس این مثلث قائم‌الزاویه است.

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال): شعاع دایره‌ای که نقاط مشترک دو کره می‌سازند، برابر با طول پاره‌خط AH در شکل مقابل است (مورد (۱) درس‌نامه). از طرفی AH ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه AOO' است، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم رابطه زیر را بنویسیم:

$$AH \cdot OO' = AO \cdot AO' \Rightarrow AH = \frac{AO \cdot AO'}{OO'} \Rightarrow r = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5} = 2.4$$

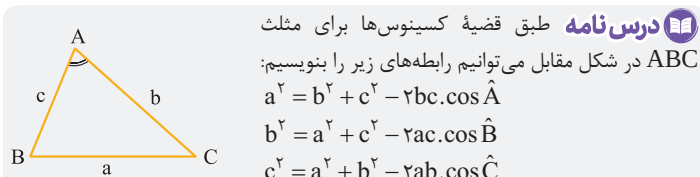
پس مساحت دایره می‌شود:

$$\pi r^2 = \pi (2.4)^2 = 5.76\pi$$

مشاوره یک‌وقت نگویید که «شکل حاصل از برخورد دو کره را باید از کجا بلد باشیم؟» یکی از تمرین‌های فصل ۴ کتاب هندسه ۱، این را از شما پرسیده است. باز هم به این نتیجه می‌رسیم که باید روی تمرین‌های کتاب درسی مسلط باشیم.

۲۸- گزینه ۱

استراتژی از B به C وصل می‌کنیم. اول از قضیه کسینوس‌ها در مثلث بزرگ‌تر و بعد از قضیه کسینوس‌ها در مثلث کوچک‌تر استفاده می‌کنیم.



گام ۱ (تحلیل سؤال و افزودن پاره‌خط مناسب به شکل): اگر از B به C وصل کنیم با استفاده از قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC طول BC به دست می‌آید، حالا اگر یک بار دیگر از قضیه کسینوس‌ها در مثلث DBC استفاده کنیم، معادله‌ای خواهیم داشت که تنها مجهول آن x است.

گام ۲ (محاسبه طول BC): به کمک قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow BC^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \times \left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow BC^2 = 25 + 49 - 35 \Rightarrow BC^2 = 39 \quad (*)$$

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال): حالا با استفاده از قضیه کسینوس‌ها در مثلث DBC می‌توانیم معادله‌ای بنویسیم که تنها مجهولش x باشد:

$$BC^2 = DB^2 + DC^2 - 2DB \cdot DC \cdot \cos \hat{D} \xrightarrow{(*)} 39 = 4^2 + x^2 - 2 \times 4 \times x \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 39 = x^2 + 4x + 16 \Rightarrow x^2 + 4x = 23$$

چون مقدار « $x + 2$ » را می‌خواهیم، « $x^2 + 4x$ » را به صورت $(x + 2)^2 - 4$ می‌نویسیم:

$$(x + 2)^2 - 4 = 23 \Rightarrow (x + 2)^2 = 27 \Rightarrow x + 2 = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

۲۹- گزینه ۱

شفاف‌سازی «دایره بر خط $y = 0$ مماس است.» یعنی دایره بر محور x مماس است.

استراتژی اول باید ببینیم دایره در کدام ناحیه بر محور x مماس است، بعد می‌توانیم مختصات مرکزش را بر حسب شعاعش بنویسیم. در ادامه فاصله مرکز از نقطه A و خط مماس $3x - 4y = 0$ را مساوی شعاع دایره می‌گذاریم. در آخر با ترکیب دو تساوی‌ای که به دست آورده‌ایم، کوچک‌ترین شعاع را پیدا می‌کنیم.

درس‌نامه ۱ مطابق شکل مقابل، اگر دایره‌ای به شعاع r در ناحیه اول، بر محور x مماس باشد، مختصات مرکزش به صورت $O(\alpha, r)$ می‌شود.



درس نامه ۱ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$

برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$

۲ بعضی وقت‌ها برای متغیرهای معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ شرط‌های $x_1 \geq c_1, x_2 \geq c_2, \dots, x_k \geq c_k$ را می‌گذارند و تعداد جواب‌های صحیح معادله را با این شرایط می‌خواهند. در این جور مواقع کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

الف) معادلهٔ مقابل را می‌سازیم: $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n - (c_1 + c_2 + \dots + c_k)$

ب) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ بالا را به دست می‌آوریم. این تعداد همان تعداد جواب‌هایی است که به دنبالش هستیم.

گام ۱ تعداد کل جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x + y + z + t = 11$ را با کمک مورد

(۱) درس‌نامه به دست می‌آوریم: $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{14}{3} = \frac{14 \times 13 \times 12}{3 \times 2 \times 1} = 364$

گام ۲ برای به دست آوردن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x + y + z + t = 11$ با شرط $x \geq 5$ ، طبق مورد (۲) درس‌نامه اول معادلهٔ زیر را می‌سازیم:

$x + y + z + t = 11 - (5) \Rightarrow x + y + z + t = 6$

که تعداد جواب‌هایش می‌شود:

$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$

گام ۳ حالا طبق اصل متمم، خواستهٔ مسئله را به دست می‌آوریم:

تعداد جواب‌های _ تعداد کل = $364 - 84 = 280$
 با شرط $x \geq 5$ جواب‌ها با شرط $x < 5$

۳۴ - گزینه ۲

درس نامه برای حل بعضی از سوالات اصل لانه کبوتری، باید ابتدا تعداد حالات بدترین حالت را حساب کنیم، حالا برای این که مطمئن شویم اتفاق مد نظر ما رخ می‌دهد، کافی است یک واحد به تعداد حالات بدترین حالت اضافه کنیم.

بدترین حالت این است که تا می‌توانیم اعدادی انتخاب کنیم که مقسوم‌علیه بزرگ‌تر از ۱ نداشته باشند، برای این کار تمام اعداد اول ۱ تا ۳۰ و خود عدد ۱ را انتخاب می‌کنیم:

$\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$

پس بدترین حالت این است که ۱۱ عدد بالا را انتخاب کنیم، حالا با انتخاب عدد «۱۲» تا ۱۱ عدد، مطمئن هستیم که حداقل دو عدد با مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از ۱ داریم.

۳۵ - گزینه ۳

استراتژی چون A و B دو پیشامد مستقل‌اند، پس اول می‌نویسیم

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ از این رابطه $P(A)$ را برحسب $P(B)$ به دست می‌آوریم

$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ در ادامه $P(A \cup B)$ را باز می‌کنیم و هر جا $P(A)$ دیدیم به جایش

$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ می‌گذاریم تا به یک معادلهٔ درجه دوم برحسب $P(B)$ برسیم. در آخر بعد از محاسبهٔ ریشه‌های این معادلهٔ درجه ۲، با توجه به شرط $P(B') > P(B)$ جواب مناسب را برای $P(B)$ انتخاب می‌کنیم.

$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

درس نامه ۱ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، داریم:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

۲ بعضی از قواعد پیشامدها را در زیر ببینید:

الف) $P(A') = 1 - P(A)$ **ب)** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

گام ۱ A و B دو پیشامد مستقل‌اند، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه،

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ می‌شود، حالا با جای گذاری $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$ در این تساوی داریم:

$P(A)P(B) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(A) = \frac{1/2}{P(B)}$

گام ۲ با توجه به مورد (۲) درس‌نامه، $P(A \cup B)$ را باز می‌کنیم:

$P(A \cup B) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (*)

چون $a = 7$ شد، پس می‌توانیم بگوییم شعاع دایره برابر ۷ است؛ بنابراین طول پاره‌خط MO هم برابر ۷ می‌شود؛ این پاره‌خط را به شکل اضافه می‌کنیم. برای محاسبهٔ MF از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث MOF استفاده می‌کنیم اما قبل از آن باید طول OF = c را به دست بیاوریم. طبق مورد (۲) درس‌نامه برای پارامترهای a، b و c می‌توانیم بنویسیم:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 7^2 = (2\sqrt{6})^2 + c^2 \Rightarrow 49 = 24 + c^2 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$
 حالا که $OF = c = 5$ را داریم، می‌توانیم به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث MOF طول MF را حساب کنیم:

$MO^2 = OF^2 + MF^2 \Rightarrow 7^2 = 5^2 + MF^2 \Rightarrow MF^2 = 24 \Rightarrow MF = \sqrt{24}$

گام ۲ (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال) برای محاسبهٔ MA، از فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ MAF استفاده می‌کنیم؛ پس اول می‌رویم سراغ محاسبهٔ طول AF:

$AF = OA - OF = a - c = 7 - 5 = 2$

حالا در مثلث MAF فیثاغورس می‌نویسیم:

$MA^2 = MF^2 + AF^2 = (\sqrt{24})^2 + 2^2 \Rightarrow MA^2 = 28 \Rightarrow MA = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

۳۱ - گزینه ۳

گام ۱ (بسط اولیه در مینان) در مینان را حول سطر اول بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & x+5 \\ x-1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & x+5 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & x+5 \\ x-1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ x-1 & 6 \end{vmatrix}$$

 $= 1(-4 - 6(x+5)) - 2(2 - (x-1)(x+5)) + 3(-12 - 4(x-1)) = 0$

گام ۲ (محاسبهٔ x) حالا معادلهٔ بالا را حل می‌کنیم:

$(-34 - 6x) - 2(2 - (x^2 + 4x - 5)) + 3(-8 - 4x) = 0$
 $-x^2 - 4x + 7$

$\Rightarrow -x^2 - 4x + 7 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 7 = 0 \Rightarrow x = 9, -4$

مشاوره تمرکز سوالات فصل اول هندسهٔ ۳، روی محاسبات زیاد است. پس حتی اگر فقط مفاهیم اولیهٔ این فصل را بلد باشید، ولی محاسباتتان قوی باشد، به احتمال زیاد سؤالی را که از این فصل می‌آید، حل می‌کنید.

۳۲ - گزینه ۱

استراتژی کافی است سؤال را با اصل متمم حل کنید، یعنی تعداد کل اعداد چهاررقمی با ارقام غیرتکراری را منهای تعداد ارقام ۴رقمی با ارقام غیرتکراری و فاقد عدد ۵ کنید تا جواب حاصل شود.

گام ۱ تعداد کل اعداد ۴رقمی با ارقام غیرتکراری برابر است با:

$9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$

همه به جز ۹ همه به جز ۸ همه به جز ۷ همه به جز ۶
 رقم هزارگان صدگان و دهگان صدگان و دهگان و دهگان و دهگان

گام ۲ حالا تعداد اعداد ۴رقمی با ارقام غیرتکراری فاقد رقم ۵ را می‌شماریم:

$8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$

همه به جز ۵ همه به جز ۴ همه به جز ۳ همه به جز ۲ همه به جز ۱ همه به جز ۰

گام ۳ در آخر طبق اصل متمم، تعداد اعداد چهاررقمی با ارقام غیرتکراری و شامل رقم ۵ برابر « $3024 - 1680 = 1344$ » تا می‌شود.

مشاوره شمارش بدون شمردن جزء پای ثابت‌های کنکورهای سراسری است که عموماً سؤالات این مبحث ساده و متوسط هستند و به راحتی می‌توانید به آن‌ها پاسخ دهید.

۳۳ - گزینه ۴

استراتژی سؤال را با اصل متمم حل کنید، یعنی تعداد کل جواب‌های صحیح و نامنفی معادله را منهای تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله با شرط $x \geq 5$ کنید.



۳۷ - گزینه ۱

استراتژی ابتدا الگوریتم تقسیم را می‌نویسیم، بعد با توجه به سه رقمی بودن m و شرط باقی‌مانده، مقادیر قابل قبول برای n را به دست می‌آوریم. حالا برای این که m مضرب ۵ باشد، باید معادلهٔ همبستگی $m \equiv 0$ را حل کنیم که با حل آن، جواب حاصل می‌شود.

درس‌نامه ۱ اگر عدد صحیح m را بر عدد طبیعی n تقسیم کنیم و خارج قسمت و باقی‌مانده را به ترتیب با q و r نمایش دهیم، الگوریتم تقسیم به شکل $m = nq + r$ می‌شود و باید $0 \leq r < n$ باشد که به آن شرط تقسیم می‌گوییم.

۲) برخی از قواعد همبستگی را در زیر ببینید:

الف) اگر عدد صحیح a مضرب b باشد، می‌توانیم بنویسیم $a \equiv 0 \pmod{b}$.

ب) همبستگی $a \equiv b$ را می‌توانیم به یک تساوی تبدیل کنیم: $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a = mt + b$

پ) می‌توانیم عددی دلخواه را به طرفین همبستگی اضافه یا از آن کم کنیم:

$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}$

ت) می‌توانیم طرفین همبستگی را در عدد صحیح دلخواهی مثل C ضرب کنیم:

$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$

ث) اگر طرفین یک همبستگی به پیمانه m ، بر عددی صحیح مثل $a \neq 0$ بخش‌پذیر بود، می‌توانیم a را از طرفین همبستگی بزنیم، اما باید حواسمان باشد که پیمانه (m) را هم بر (a, m) تقسیم کنیم:

$ab \equiv ac \pmod{m} \xrightarrow{(a, m)=d} b \equiv c \pmod{\frac{m}{d}}$

۳) به معادله‌هایی به فرم $ax \equiv b \pmod{m}$ معادلهٔ همبستگی می‌گوییم. برای مثال $17x \equiv 1 \pmod{9}$ یک معادلهٔ همبستگی است و هدف ما از حل آن، تنهاکردن x است. کاری می‌کنیم که ضریب x از بین برود:

$$17x \equiv 1 \pmod{9} \xrightarrow{-2 \times 9} -x \equiv 1 \pmod{9} \xrightarrow{\times(-1)} x \equiv -1 \pmod{9} \Rightarrow x = 9t - 1$$

گام ۱ ابتدا الگوریتم تقسیم و شرط تقسیم را می‌نویسیم (طبق مورد (۱) درس‌نامه):

$m = n \times 29 + 17$ ، $0 \leq 17 < n$
شرط تقسیم

$100 \leq m \leq 999 \xrightarrow{m=29n+17} 100 \leq 29n + 17 \leq 999$

$\Rightarrow 83 \leq 29n \leq 982 \xrightarrow{\div 29} 2 / \dots \leq n \leq 33 / \dots$

$\xrightarrow{n \text{ صحیح است}} n = 3, 4, 5, \dots, 33$

از طرفی در گام (۱) دیدیم که $n > 17$ است، پس مقادیر قابل قبول برای n تا این جا این‌هاست:

$n = 18, 19, 20, \dots, 33$

بنابراین می‌توانیم بگوییم: $18 \leq n \leq 33$ (*)

گام ۲ می‌خواهیم m بر ۵ بخش‌پذیر باشد، پس طبق قسمت (الف) مورد (۲) درس‌نامه باید بنویسیم:

$$m \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow 29n + 17 \equiv 0 \pmod{5} \xrightarrow{-17} 29n \equiv -17 \pmod{5} \Rightarrow -n \equiv -2 \pmod{5}$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} n \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow n = 5t + 2$$

گام ۳ حالا به جای n در نامساوی (*) می‌نویسیم $5t + 2$:

$$18 \leq n \leq 33 \Rightarrow 18 \leq 5t + 2 \leq 33 \xrightarrow{t \text{ صحیح است}} t = 4, 5, 6$$

برای $t, 3$ مقدار صحیح پیدا شد، پس برای m و n هم ۳ مقدار قابل قبول داریم.

۳۸ - گزینه ۴

درس‌نامه ۱ اگر $(a, b) = d$ باشد، داریم:

۲) بعضی از قوانین عادی کردن را در زیر ببینید:

$$\left. \begin{array}{l} \text{الف) } a|b \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} a|mb \\ \text{ب) } \left\{ \begin{array}{l} a|b \\ a|c \end{array} \right\} \Rightarrow a|b \pm c \\ \text{پ) } a|a \end{array} \right\}$$

گام ۱ $(3n^2 - 2n + 6, 3n + 5) = d$ است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} d|3n + 5 \\ d|3n^2 - 2n + 6 \end{array} \right.$$

گام ۲ حالا در معادله (*) به جای $P(A)$ قرار می‌دهیم $\frac{0}{1}$ و معادله درجه دوم حاصل را حل می‌کنیم:

$$\frac{0}{1} + P(B) = \frac{0}{1} \xrightarrow{\times P(B)} \frac{0}{1} + P^2(B) = \frac{0}{1} \Rightarrow P(B) = \frac{0}{1} \Rightarrow P^2(B) - \frac{0}{1} + P(B) + \frac{0}{1} = 0 \xrightarrow{\Delta = 0/9} \left\{ \begin{array}{l} P(B) = \frac{0/7 + \sqrt{0/9}}{2} = 0/5 \\ P(B) = \frac{0/7 - \sqrt{0/9}}{2} = 0/2 \end{array} \right.$$

گام ۳ اگر در نامساوی $P(B') > P(B)$ به جای $P(B')$ (طبق مورد (۲) - الف) درس‌نامه) قرار دهیم $1 - P(B)$ داریم:

$$1 - P(B) > P(B) \Rightarrow 1 > 2P(B) \Rightarrow P(B) < \frac{1}{2} \text{ یا } P(B) < 0/5$$

بنابراین مقدار $P(B)$ باید کوچک‌تر از $0/5$ باشد و $0/2$ قابل قبول می‌شود.

۳۹ - گزینه ۴

استراتژی اول از روی نمودار میله‌ای، جدول فراوانی داده‌ها را رسم می‌کنیم؛ بعد می‌رویم سراغ محاسبهٔ میانگین موزون داده‌ها. محاسبهٔ میانه هم که نسبتاً ساده است.

درس‌نامه ۱ در نمودار میله‌ای فراوانی، ارتفاع هر میله برابر با فراوانی آن داده است.

۲) اگر مطابق جدول زیر، فراوانی داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ به ترتیب برابر با $f_1, f_2, \dots, f_n$ باشد:

داده‌ها	x_1	x_2	...	x_n
فراوانی	f_1	f_2	...	f_n

میانگین این داده‌ها که با $\bar{x}$ نمایش می‌دهیم، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

۳) اگر همهٔ داده‌ها را با عددی ثابت مثل a جمع کنیم، میانگین هم با a جمع می‌شود و اگر همهٔ داده‌ها را منهای a کنیم، میانگین هم منهای a می‌شود؛ بنابراین وقتی داده‌ها بزرگ‌اند، می‌توانیم همهٔ آن‌ها را منهای عددی ثابت مثل a کنیم، میانگین داده‌های جدید را به دست آورده و با a جمع کنیم تا جواب حاصل شود.

۴) اگر تعدادی داده داشته باشیم و تعداد داده‌ها فرد باشد، میانه برابر با دادهٔ وسط و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانه برابر میانگین دو دادهٔ وسط می‌شود (البته به شرطی که داده‌ها را از کوچک به بزرگ بنویسیم).

گام ۱ ابتدا با توجه به نمودار، جدول فراوانی داده‌ها را رسم می‌کنیم:

داده‌ها	۷	۹	۱۱	۱۳
فراوانی	۱۵	۹	۵	۱۱

گام ۲ $40 = 15 + 9 + 5 + 11$ داده داریم، پس طبق مورد (۴) درس‌نامه، میانه برابر با میانگین دو دادهٔ وسط، یعنی داده‌های ۲۰م و ۲۱م می‌شود. با دقت به جدول فراوانی، متوجه می‌شویم ۱۵ دادهٔ اول ۷ هستند و ۹ دادهٔ بعد ۹، پس طبیعتاً دادهٔ ۲۰م و ۲۱م هم برابر ۹ می‌شوند، ببینید:

$$\begin{array}{ccccccc} & \uparrow & & \uparrow & & & \\ 7, 7, 7, \dots, 7, & 9, & 9, & 9, & 9, & 9, & 9, \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ & \text{داده ۲۰م} & & \text{داده ۲۱م} & & & \end{array}$$

بنابراین میانه برابر $9 = \frac{9+9}{2}$ است.

گام ۳ حالا برای این که میانگین داده‌ها را راحت‌تر محاسبه کنیم، همهٔ داده‌ها را منهای ۱۰ می‌کنیم، میانگین داده‌های جدید را به دست می‌آوریم و عدد حاصل را به علاوهٔ ۱۰ می‌کنیم تا میانگین داده‌های اولیه حاصل شوند:

داده‌های منهای ۱۰	-۳	-۱	۱	۳
فراوانی	۱۵	۹	۵	۱۱

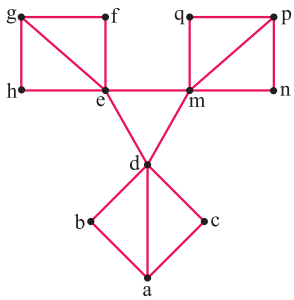
$$\bar{x} = \frac{-3 \times 15 - 1 \times 9 + 1 \times 5 + 3 \times 11}{15 + 9 + 5 + 11} = \frac{-16}{40} = -0/4$$

بنابراین میانگین داده‌های اولیه $9 = -0/4 + 10$ می‌شود.

البته می‌توانستیم میانگین را به طور مستقیم هم محاسبه کنیم:

$$\bar{x} = \frac{7 \times 15 + 9 \times 9 + 11 \times 5 + 13 \times 11}{15 + 9 + 5 + 11} = \frac{384}{40} = 9/6$$

گام ۴ تفاضل میانه از میانگین را می‌خواهیم که برابر $9/6 - 9 = 0/6$ می‌شود.



گام ۳ در این گراف ۳ مربع داریم که هر مربع، ۳ مجموعه احاطه‌گر مینیمال دارد؛ ببینید:
 مربع abdc: $\{a\}, \{d\}, \{b, c\}$
 مربع efgh: $\{e\}, \{g\}, \{f, h\}$
 مربع mnop: $\{p\}, \{m\}, \{n, o\}$
گام ۴ بنابراین تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال این گراف $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$ تا است که بعضی از آن‌ها را در زیر برایتان نوشته‌ایم:
 $\{a, g, p\}, \{d, g, p\}, \{b, c, g, p\}, \{a, e, p\}, \dots$

فیزیک

۴۱- گزینه ۳

استراتژی در فرایندهای واپاشی، عدد جرمی و عدد اتمی قبل از فرایند را به ترتیب برابر با مجموع عدد جرمی‌ها و مجموع عدد اتمی‌ها پس از فرایند قرار بدهید. با این روش می‌توانید عدد جرمی و عدد اتمی هسته دختر را پیدا کنید.

درس‌نامه واپاشی آلفا (α): پرتوهای α ، ذرات باردار مثبت از جنس هسته اتم هلیم (${}^4_2\text{He}$) هستند و از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده‌اند. واپاشی α رابطه زیر بیان می‌شود.

گام ۱ ابتدا فرایند این واپاشی را می‌نویسیم (هسته دختر را با ${}_Z^AY$ نشان دادیم).



گام ۲ تعداد نوکلئون‌ها قبل از فرایند با تعداد نوکلئون‌ها پس از فرایند یکسان است؛ بنابراین با توجه به فرایند این واپاشی می‌توانیم بنویسیم:

$$238 = A + 4 \rightarrow A = 234$$

$$92 = Z + 2 \rightarrow Z = 90$$

بنابراین ${}^{238}_{92}\text{U}$ با تابش یک پرتو α به عنصر ${}^{234}_{90}\text{Th}$ تبدیل می‌شود.

۴۲- گزینه ۲

شفاف‌سازی نماد $\otimes$ بیانگر درون‌سو و نماد $\odot$ بیانگر برون‌سو است.

درس‌نامه در اطراف یک حلقه حامل جریان، میدان مغناطیسی ایجاد می‌شود که اندازه آن در داخل حلقه بزرگ‌تر از بیرون حلقه است. برای تعیین جهت میدان مغناطیسی از قاعده دست راست استفاده می‌کنیم. طبق این قاعده، اگر انگشت شست دست را در جهت جریان قرار بدهیم، جهت خم شدن چهار انگشت، جهت میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد.

با توجه به قاعده دست راست، جهت جریان باید ساعتگرد باشد تا میدان مغناطیسی درون حلقه حامل جریان، درون‌سو باشد. خطوط میدان مغناطیسی درون حلقه به یکدیگر نزدیک‌تر هستند، پس اندازه میدان مغناطیسی درون حلقه بزرگ‌تر از بیرون حلقه است؛ یعنی: $B_1 > B_2$.

۴۳- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ قضیه کار-انرژی جنبشی، کار کل انجام‌شده بر روی جسم (کار نیروی خالص وارد بر جسم) برابر با تغییرات انرژی جنبشی جسم است.

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$

جرم (kg) $\nearrow$ تندیهایی (m/s) $\nwarrow$ تند اولیه (m/s)

۲ کار کل: به جمع جبری کار تک‌تک نیروهای وارد بر جسم، کار کل می‌گوییم.
 $W_t = W_1 + W_2 + \dots$

گام ۳ حالا سعی می‌کنیم با قوانین عادی کردن، n را از سمت راست معادله حذف کنیم:

$$\begin{cases} d | 3n + 5 \xrightarrow{\text{سمت راست} \times n} d | 3n^2 + 5n \\ d | 3n^2 - 2n + 6 \xrightarrow{\text{خودش}} d | 3n^2 - 2n + 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d | 7n - 6$$

$$\begin{cases} d | 3n + 5 \xrightarrow{\text{سمت راست} \times 7} d | 21n + 35 \\ d | 7n - 6 \xrightarrow{\text{سمت راست} \times 3} d | 21n - 18 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d | 53$$

حالا داریم: d عددی طبیعی است، پس می‌تواند برابر ۱ یا ۵۳ باشد ($d | 53$) یعنی d یکی از مقسوم‌علیه‌های ۵۳ است، حالا ۵۳ عددی اول است، پس تنها مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن، ۱ و خود آن یعنی ۵۳ هستند. اما طبق گفته سؤال $d \neq 1$ ، بنابراین $d = 53$ می‌شود.

تیزبازی اول نکته زیر را بخوانید: عبارت خطی

نکته هر وقت دو بخش پذیری به فرم‌های $m | f(x)$ و $m | ax + b$ داشته باشیم، می‌توانیم ریشه عبارت خطی، یعنی $x = -\frac{b}{a}$ را در سمت راست بخش‌پذیری $m | f(x)$ جای‌گذاری کنیم؛ یعنی:

$$\begin{cases} m | f(x) \\ m | ax + b \end{cases} \Rightarrow m | f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

فقط در جریانی باشید که اگر $f(-\frac{b}{a})$ کسری شد، باید اول تا جای ممکن ساده‌اش کنید؛ بعد مخرجش را حذف کنید.

در روش معمولی دیدیم که $d | 3n + 5$ و $d | 3n^2 - 2n + 6$ ، پس طبق نکته بالا می‌توانیم به جای n در بخش‌پذیری دوم، $-\frac{5}{3}$ را جای‌گذاری کنیم:

$$\begin{aligned} d | 3\left(-\frac{5}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{5}{3}\right) + 6 &\Rightarrow d | \frac{25}{3} + \frac{10}{3} + 6 \Rightarrow d | \frac{25}{3} + 6 \\ &\Rightarrow d | \frac{53}{3} \xrightarrow{\text{حذف مخرج}} d | 53 \xrightarrow[\text{طبیعی است.}]{d \neq 1} d = 53 \end{aligned}$$

۳۹- گزینه ۱

شفاف‌سازی « m همنهشت کدام عدد به پیمانه ۱۸۳۷ است»، یعنی باقی‌مانده تقسیم m بر ۱۸۳۷ کدام است.

درس‌نامه عدد $a_1 \dots a_n a_n a_n a_n$ را می‌توانیم به صورت زیر باز کنیم:

$$a_n \dots a_n a_n a_n = a_1 + 10a_2 + 100a_3 + \dots + 10^{n-1}a_n$$

گام ۱ اگر ۵ برابر عدد aa را در سمت چپ آن قرار دهیم، به عدد $5aa$ می‌رسیم.

گام ۲ حالا این عدد را به کمک درس‌نامه باز می‌کنیم:

$$m = 5aa = 100 \times (aa) + aa \Rightarrow m = 501(aa)$$

چون $aa = 10a + a = 11a$ ، پس تساوی بالا را می‌توانیم به این صورت بنویسیم:

$$m = 501(11a) = 5511a$$

گام ۳ با کمی دقت متوجه می‌شویم که $5511 \times 3 = 1837$ ، پس ۵۵۱۱ا مضرب ۱۸۳۷ است و باقی‌مانده تقسیم آن بر ۱۸۳۷ برابر صفر می‌شود.

تیزبازی می‌توانیم به جای a قرار دهیم ۱، در این صورت باید ۵ برابر عدد ۱۱ را سمت چپ آن قرار دهیم که عدد ۵۵۱۱ حاصل می‌شود و باقی‌مانده تقسیم آن بر ۱۸۳۷ برابر صفر است.

۴۰- گزینه ۴

استراتژی باید تعداد مجموعه‌های متمایز احاطه‌گر مینیمال هر مربع (در این گراف ۳ مربع abdc، efgh، mnpq را داریم) را به دست آورده و به توان ۳ برسانید (چرا به توان ۳ چون ۳ مربع داریم) تا جواب حاصل شود.

درس‌نامه ۱ مجموعه احاطه‌گر: به زیرمجموعه D از رئوس گراف G ، یک مجموعه احاطه‌گر می‌گوییم، هرگاه رأس‌های گراف یا در D باشند یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشند. **۲** مجموعه احاطه‌گری را که با حذف هر کدام از عضوهایش دیگر احاطه‌گر نباشد، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.



(به خاطر همین مکان اتومبیل A رو در لحظه $t = 11s$ به دست آوردیم، چون x_{A0} رو می‌فراستیم.)
 حالا بریم سراغ اتومبیل B! اتومبیل B به مدت ۵ ثانیه با شتاب ثابت حرکت می‌کند و در لحظه
 $t' = 5s$ ، نوع حرکت آن عوض شده و با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. مکان
 اتومبیل B در لحظه $t' = 5s$ (لحظه تغییر نوع حرکت) را با استفاده از معادله مکان - زمان
 در حرکت با شتاب ثابت به دست می‌آوریم.

$$x_B = \frac{1}{2} a_B t'^2 + v_{B0} t' + x_{B0} \quad \frac{a_B = 2 \text{ m/s}^2, t' = 5s}{v_{B0} = 2 \text{ m/s}, x_{B0} = 0} \rightarrow x_B = \frac{1}{2} (2) (5)^2 + 2(5) = 25 + 10 = 35 \text{ m}$$

همان‌طور که گفتیم، اتومبیل B پس از لحظه $t' = 5s$ با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه
 می‌دهد. سرعت اتومبیل B در این لحظه را با استفاده از معادله سرعت - زمان در حرکت با
 شتاب ثابت به دست می‌آوریم.

$$v = at + v_0 \quad \frac{v_0 = 2 \text{ m/s}}{a = 2 \text{ m/s}^2, t' = 5s} \rightarrow v_B = 2(5) + 2 = 12 \text{ m/s}$$

حالا می‌توانیم معادله مکان - زمان اتومبیل B پس از لحظه $t' = 5s$ را بنویسیم.

$$x'_B = v_B t + x_B \quad \frac{v_B = 12 \text{ m/s}}{x_B = 35 \text{ m}} \rightarrow x'_B = 12t + 35$$

(به خاطر همین مکان و سرعت اتومبیل B در لحظه $t' = 5s$ رو به دست آوردیم، چون برای نوشتن
 معادله مکان - زمان آن پس از این لحظه، بهوش نیاز داشتیم.)

مکان اتومبیل A در لحظه $t = 11s$ را داریم ($x_A = 110 \text{ m}$)، اما مکان اتومبیل B در این
 لحظه را نداریم. همان‌طور که دیدیم، اتومبیل B پس از لحظه $t' = 5s$ با سرعت ثابت به
 حرکت خود ادامه می‌دهد؛ پس اتومبیل B در لحظه $t = 11s$ به مدت $t = 6s$ ($11 - 5$) با
 سرعت ثابت حرکت کرده است؛ بنابراین مکان آن در لحظه $t = 11s$ برابر است با:

$$x'_B = 12t + 35 \xrightarrow{t=6s} x'_B = 12(6) + 35 = 72 + 35 = 107 \text{ m}$$

در نتیجه اتومبیل B در لحظه $t = 11s$ ، از مکان $x'_B = 107 \text{ m}$ با سرعت ثابت 12 m/s
 عبور می‌کند؛ بنابراین معادله مکان - زمان اتومبیل B پس از لحظه $t = 11s$ به صورت زیر است:

$$x''_B = v_B t + x'_B \quad \frac{v_B = 12 \text{ m/s}}{x'_B = 107 \text{ m}} \rightarrow x''_B = 12t + 107$$

حالا معادله مکان - زمان هر دو اتومبیل پس از لحظه $t = 11s$ را داریم. برای این که ببینیم
 این دو اتومبیل در چه لحظه‌ای به هم می‌رسند، باید معادله مکان - زمان آن‌ها را مساوی با
 $x''_B = x'_A \Rightarrow 12t + 107 = -t^2 + 10t + 110$ یکدیگر قرار بدهیم.
 $\Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t+3)(t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -3s \text{ } \times \\ t = 1s \text{ } \checkmark \end{cases}$

پس دو اتومبیل ۱ ثانیه پس از لحظه $t = 11s$ (یعنی در لحظه $t = 12s$) به هم می‌رسند.
 حالا بریم سراغ فاصله سوال! سرعت اتومبیل B در این لحظه برابر با 12 m/s است (یادتون
 نرفته که اتومبیل B پس از لحظه $t' = 5s$ با سرعت ثابت 12 m/s حرکت می‌کرد؟)، اما سرعت
 اتومبیل A را باید از معادله سرعت - زمان آن به دست بیاوریم. پس معادله سرعت - زمان
 اتومبیل A پس از لحظه $t = 11s$ را می‌نویسیم.

$$v'_A = a_A t + v_{A0} \quad \frac{a_A = -2 \text{ m/s}^2}{v_{A0} = 10 \text{ m/s}} \rightarrow v'_A = -2t + 10$$

بنابراین سرعت اتومبیل A در لحظه $t = 12s$ (یعنی ۱s پس از $t = 11s$) برابر است با:

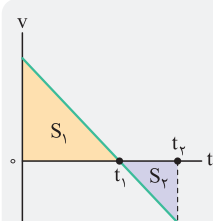
$$v'_A = -2(1) + 10 = 8 \text{ m/s}$$

در لحظه‌ای که دو اتومبیل به یکدیگر می‌رسند، سرعت اتومبیل A، 8 m/s و سرعت
 اتومبیل B، 12 m/s است؛ پس تندی اتومبیل B، 4 m/s ($12 - 8$) از تندی اتومبیل
 A در این لحظه بیشتر است. من دیگه حال ادامه‌دارن ندارم، ولی بریم سوال بعدی.



گزینه ۴۶

درس نامه



مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان
 و محور t در یک بازه زمانی، بیانگر اندازه جابه‌جایی متحرک
 در آن بازه زمانی است. اگر نمودار سرعت - زمان بالای محور
 t باشد، جابه‌جایی متحرک مثبت و اگر پایین محور t باشد،
 جابه‌جایی متحرک منفی است.

$$\Delta x_1 = S_1 \quad \text{جابه‌جایی در بازه زمانی صفر تا } t_1$$

$$\Delta x_2 = -S_2 \quad \text{جابه‌جایی در بازه زمانی } t_1 \text{ تا } t_2$$

$$\Rightarrow \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = S_1 - S_2 \quad \text{جابه‌جایی در بازه زمانی صفر تا } t_2$$

کافی است از قضیه کار - انرژی جنبشی استفاده کنیم (توجه کنید که چون گلوله در راستای
 قائم جابه‌جا نمی‌شود، پس کار نیروی وزن صفر است.)

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) \Rightarrow \cancel{W_{mg}} + W_F = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) \\ \Rightarrow W_F = -\frac{1}{2} \left(\frac{4}{100} \right) (300)^2 = -1800 \text{ J}$$

مشاوره همیشه قرار نیست همه اطلاعات سوال به کارمان بیاید! مثلاً در همین سوال،
 مسافت 20 cm باری از روی دشمنان برداشت.



گزینه ۴۴

درس نامه ۱ انبساط حجمی اجسام جامد: ضریب انبساط طولی ($\frac{1}{K}$ یا $\frac{1}{\alpha}$) تغییر حجم (m^3)

$$\Delta V = \alpha V_1 \Delta \theta \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{تغییر دما (یا } K \text{ یا } ^\circ C) \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{حجم اولیه (} m^3 \text{)} \end{array} \\ \Delta A = \alpha A_1 \Delta \theta \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{سطح اولیه (} m^2 \text{)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ \text{تغییر مساحت (} m^2 \text{)} \end{array}$$

۲ انبساط سطحی اجسام جامد:

گام ۱ با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر، ضریب انبساط طولی (α) را به دست می‌آوریم.

$$\Delta V = \alpha V_1 \Delta \theta \quad \frac{\Delta V = 8 \times 10^{-4} V_1}{\Delta \theta = 80^\circ C} \rightarrow \frac{8 \times 10^{-4}}{80} \times V_1 = \alpha V_1 \times 1^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{1}{10} \times 10^{-5} \frac{1}{^\circ C}$$

گام ۲ حالا باید ببینیم سطح کره در اثر افزایش دمای $60^\circ C$ ، چگونه تغییر می‌کند.

$$\Delta A = \alpha A_1 \Delta \theta \Rightarrow \Delta A = 2 \times \frac{1}{10} \times 10^{-5} \times 60 A_1 = 4 \times 10^{-4} A_1$$

گام ۳ در آخر درصد تغییر سطح کره را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{درصد تغییر سطح کره} = \frac{\Delta A}{A_1} \times 100 = \frac{4 \times 10^{-4} A_1}{A_1} \times 100 = 0.04\%$$



گزینه ۳۵

شفاف‌سازی لحظه‌ای که دو متحرک به یکدیگر می‌رسند، مکان آن‌ها یکسان است.

درس نامه ۱ معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت بر روی خط راست:

$$x = v t + x_0 \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{سرعت (m/s)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{مکان اولیه (m)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{زمان (s)} \end{array}$$

۲ معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست:

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{شتاب (m/s}^2 \text{)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{مکان اولیه (m)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{شتاب اولیه (m/s)} \end{array}$$

۳ معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست:

$$v = a t + v_0 \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{شتاب (m/s}^2 \text{)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{سرعت اولیه (m/s)} \end{array}$$

با سوال پُرکاری مواجهیم. اتومبیل A به مدت ۱۱ ثانیه با سرعت ثابت حرکت می‌کند و در لحظه
 $t = 11s$ ، نوع حرکت آن عوض شده و با شتاب ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. مکان اتومبیل
 A در لحظه $t = 11s$ (لحظه تغییر نوع حرکت) را با استفاده از معادله مکان - زمان در حرکت با
 سرعت ثابت به دست می‌آوریم.

$$x_A = v_A t + x_{A0} \quad \frac{v_A = 10 \text{ m/s}}{t = 11s, x_{A0} = 0} \rightarrow x_A = 10 \times 11 = 110 \text{ m}$$

همان‌طور که گفتیم، اتومبیل A پس از لحظه $t = 11s$ با شتاب ثابت به حرکت خود ادامه
 می‌دهد؛ بنابراین معادله مکان - زمان آن پس از این لحظه، به صورت زیر است (توجه کنید که
 سرعت متحرک در لحظه $t = 11s$ برابر با 10 m/s است، پس $v_{A0} = 10 \text{ m/s}$ است.)

$$x'_A = \frac{1}{2} a_A t^2 + v_{A0} t + x_{A0} \quad \frac{a_A = -2 \text{ m/s}^2}{v_{A0} = 10 \text{ m/s}, x_{A0} = 110 \text{ m}} \rightarrow x'_A = \frac{1}{2} (-2) t^2 + 10t + 110 = -t^2 + 10t + 110$$



۲ در سقوط آزاد، سرعت متوسط در یک بازه زمانی مشخص برابر با میانگین سرعت‌های ابتدایی و انتهای آن بازه زمانی است. سرعت ثانویه (m/s) سرعت اولیه (m/s)

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

(m/s) سرعت متوسط

۳ با توجه به شکل مقابل، سرعت متوسط گلوله در $\frac{H}{9}$ ابتدای مسیر را می‌نویسیم.

$$v_{av} = \frac{v_0 + v_1}{2} \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{0 + v_1}{2} \Rightarrow v_1 = \frac{8}{9} \text{ m/s}$$

۴ حالا از معادله مستقل از زمان استفاده می‌کنیم.

$$v_1^2 = 2g \frac{H}{9} \Rightarrow \left(\frac{v_1}{v_1}\right)^2 = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = 3$$

$$v_2^2 = 2gH$$

$$v_1 = \frac{8}{9} \text{ m/s} \Rightarrow v_2 = 3 \times \frac{8}{9} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3} \text{ m/s}$$

مشاوره در مسائل سقوط آزاد، رسم شکل به شما کمک می‌کند تا مسئله را بهتر درک کنید؛ پس شکل مناسبی رسم کنید و با استفاده از شکل، حرکت جسم را تحلیل کنید.

۴۹ - گزینه ۳

درس‌نامه نیروی خالص وارد بر جسم برابر با تغییر تکانه جسم تقسیم بر زمان تغییر آن است.

$$F_{net} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \rightarrow \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}\right) \rightarrow \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}\right)$$

تغییر تکانه (N) نیروی خالص (s) مدت زمان تغییر تکانه

۵ ابتدا تکانه جسم را در لحظه‌های $t_1 = 3 \text{ s}$ و $t_2 = 6 \text{ s}$ به دست می‌آوریم:

$$p = 15t^2 + \Delta t \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 15(3)^2 + \Delta t = 15(9+1) = 150 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \\ p_2 = 15(6)^2 + \Delta t = 540 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

۶ حالا داده‌ها را در رابطه زیر جای‌گذاری می‌کنیم و نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در این بازه زمانی را محاسبه می‌کنیم.

$$F_{net} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1}$$

$$\frac{p_1 = 150 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}, t_1 = 3 \text{ s}}{p_2 = 540 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}, t_2 = 6 \text{ s}} \Rightarrow F_{net} = \frac{540 - 150}{6 - 3} = \frac{390}{3} = 130 \text{ N}$$

۵۰ - گزینه ۴

شفاف‌سازی نیرویی که جسم به سطح وارد می‌کند و نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند، کنش و واکنش‌اند.

درس‌نامه ۱ بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N$$

ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح
نیروی عمودی سطح (N) نیروی اصطکاک ایستایی (N)

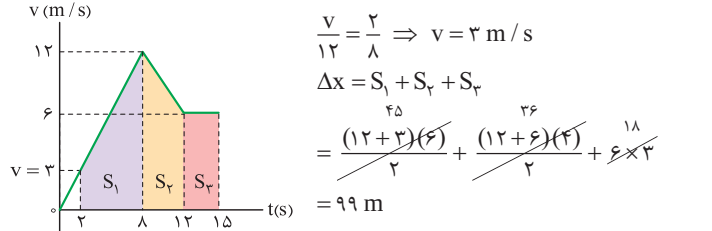
در رابطه بالا، اگر $f_{s,max} \leq F_{جرّی}$ باشد، جسم ساکن می‌ماند و نیروی اصطکاک برابر با $F_{جرّی}$ است. ۲ نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند، برابر برابند دو نیروی عمودی سطح ($\vec{F}_N$) و نیروی اصطکاک ($\vec{f}$) است. در رابطه بالا، $\vec{f}$ می‌تواند $\vec{f}_s$ یا $\vec{f}_k$ باشد.

۳ ابتدا بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی ($f_{s,max}$) را محاسبه می‌کنیم و با $F = 250 \text{ N}$ مقایسه می‌کنیم تا ببینیم جسم حرکت می‌کند یا نه!

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow{F_N = mg = 500 \text{ N}} f_{s,max} = 0.6 \times 500 = 300 \text{ N}$$

چون $F < f_{s,max}$ است، پس جسم ساکن می‌ماند و $f_s = F = 250 \text{ N}$ است.

مکان متحرک در لحظه $t_1 = 2 \text{ s}$ را داریم و مکان آن را در لحظه $t_2 = 15 \text{ s}$ می‌خواهیم. برای این که مکان متحرک را در لحظه $t_2 = 15 \text{ s}$ به دست بیاوریم، به جابه‌جایی آن در بازه زمانی $t_1 = 2 \text{ s}$ تا $t_2 = 15 \text{ s}$ نیاز داریم. از طرفی، مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور t در یک بازه زمانی، بیانگر اندازه جابه‌جایی متحرک در آن بازه زمانی است؛ پس باید مساحت محصور در این بازه زمانی را محاسبه کنیم. ابتدا با استفاده از تشابه مثلث‌ها، سرعت متحرک در لحظه $t_1 = 2 \text{ s}$ را به دست می‌آوریم سپس مجموع مساحت‌های S_1 ، S_2 و S_3 را که برابر با جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی $t_1 = 2 \text{ s}$ تا $t_2 = 15 \text{ s}$ است، محاسبه می‌کنیم.



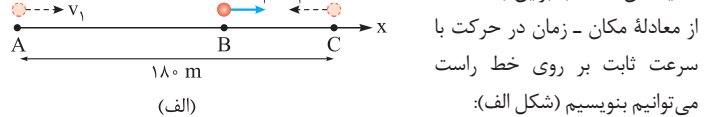
حالا می‌توانیم مکان متحرک در لحظه $t_2 = 15 \text{ s}$ را به دست بیاوریم.

$$\Delta \vec{x} = 99 \hat{i} \Rightarrow \vec{x}_2 - (-6 \hat{i}) = 99 \hat{i} \Rightarrow \vec{x}_2 = 93 \hat{i}$$

۴۷ - گزینه ۲

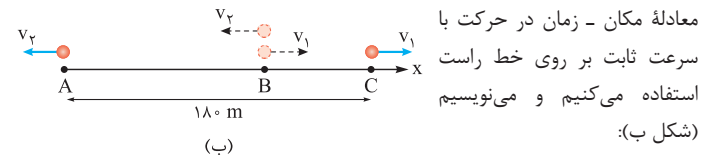
شفاف‌سازی دو متحرک هم‌زمان از نقطه‌های A و C به سمت یکدیگر حرکت کرده‌اند و در نقطه B از کنار هم می‌گذرند؛ پس مدت زمان سپری شده برای هر دو متحرک تا زمان رسیدن به نقطه B یکسان است.

۱ دو متحرک (۱) و (۲) با سرعت‌های ثابت به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند و در نقطه B از کنار هم می‌گذرند؛ پس مدت زمان سپری شده برای هر دو متحرک تا زمان رسیدن به نقطه B یکسان است؛ بنابراین با استفاده



$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_B = v_1 t + x_A \rightarrow x_B - x_A = v_1 t \quad (1) \\ x_B = -v_2 t + x_C \rightarrow x_C - x_B = v_2 t \quad (2) \end{cases}$$

۲ در ادامه، برای این که متحرک (۱) از B به C برسد، ۱۶ ثانیه طول می‌کشد و همچنین برای این که متحرک (۲) از B به A برسد، ۲۵ ثانیه طول می‌کشد؛ پس دوباره از معادله مکان - زمان در حرکت با



$$x_C = v_1 t_1 + x_B \xrightarrow{t_1 = 16 \text{ s}} x_C - x_B = 16 v_1 \quad (3)$$

$$x_A = -v_2 t_2 + x_B \xrightarrow{t_2 = 25 \text{ s}} x_B - x_A = 25 v_2 \quad (4)$$

۳ با کمی دقت می‌بینیم که رابطه‌های (۱) و (۴) و همچنین رابطه‌های (۲) و (۳) مشابه هم هستند؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$(4), (1): v_1 t = 25 v_2 \quad (5)$$

$$(3), (2): v_2 t = 16 v_1 \quad (6)$$

در ادامه با یک نرمش قهرمانانه، رابطه (۶) را بر رابطه (۵) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{v_2 t}{v_1 t} = \frac{16 v_1}{25 v_2} \Rightarrow \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \frac{16}{25} \xrightarrow{\text{جذر}} \frac{v_2}{v_1} = \frac{4}{5}$$

۴ در آخر رابطه‌های (۳) و (۴) را با هم جمع می‌کنیم و با توجه به شکل (الف) می‌نویسیم:

$$x_C - x_B + x_B - x_A = 16 v_1 + 25 v_2 \xrightarrow{x_C - x_A = 180 \text{ m}} 16 v_1 + 25 \left(\frac{4}{5} v_1\right) = 180$$

$$\Rightarrow 16 v_1 + 20 v_1 = 180 \Rightarrow 36 v_1 = 180 \Rightarrow v_1 = 5 \text{ m/s}$$

۴۸ - گزینه ۳

درس‌نامه ۱ رابطه مستقل از زمان در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه به صورت مقابل است (جهت مثبت y را رو به پایین فرض کردیم):

شتاب گرانش (m/s^2)

$$v^2 = 2g \Delta y$$

سرعت (m/s) جابه‌جایی در راستای قائم (m)



گام ۴ در آخر تغییرات شتاب گرانش را بر حسب درصد به دست می آوریم.

$$\frac{g_2 - g_1}{g_1} \times 100 = \frac{0.64g_1 - g_1}{g_1} \times 100 = -36\%$$

بنابراین شتاب مرکزگرای ماهواره، ۳۶ درصد کاهش می یابد.

تله ۱ اگر $(\frac{r_1}{r_2})$ را به توان ۲ نرسانید، به $(\frac{r_1}{r_2})^2$ می رسید.



گزینه ۱

شفاف سازی شتاب نوسانگر هماهنگ ساده در لحظه ای که جهت حرکت آن تغییر می کند، بیشینه و سرعت آن در لحظه ای که نیروی وارد بر آن صفر است، بیشینه است.

درس نامه ۱ شتاب نوسانگر در هر نقطه از مسیر نوسان:

بسامد زاویه ای (rad/s)

$$a = -\omega^2 x$$

مکان نوسانگر (m)

در حرکت هماهنگ ساده، شتاب نوسانگر در انتهای پاره خط نوسان (مکانی که نوسانگر تغییر جهت می دهد). بیشینه است و بزرگی آن از رابطه زیر به دست می آید:

$$|a_{\max}| = A\omega^2$$

دامنه نوسان (m)

۲ در حرکت هماهنگ ساده، بزرگی سرعت نوسانگر در وسط پاره خط نوسان (مکانی که نیروی وارد بر نوسانگر صفر می شود). بیشینه است و بزرگی آن از رابطه زیر به دست می آید:

$$|v_{\max}| = A\omega$$

گام ۳ در لحظه ای که جهت حرکت نوسانگر تغییر می کند، بزرگی شتاب نوسانگر بیشینه و در لحظه ای که نیروی وارد بر آن صفر می شود، بزرگی سرعت آن بیشینه است؛ بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} |a_{\max}| = A\omega^2 \\ |v_{\max}| = A\omega \end{cases} \Rightarrow \omega = \frac{|a_{\max}|}{|v_{\max}|}$$

$$\frac{a_{\max} = 0.4\pi^2 \text{ m/s}^2}{v_{\max} = 0.2\pi \text{ m/s}} \Rightarrow \omega = \frac{0.4\pi^2}{0.2\pi} = 4\pi \text{ rad/s}$$

گام ۴ حالا بزرگی شتاب نوسانگر در مکان $x = 1 \text{ cm}$ را محاسبه می کنیم:

$$a = -\omega^2 x \xrightarrow{x=1\text{cm}=0.01\text{m}} a = -(4\pi)^2 \times 0.01 = -0.16\pi^2 \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow |a| = 0.16\pi^2 \text{ m/s}^2$$



گزینه ۲

استراتژی ابتدا شدت صوت را به کمک تراز شدت صوت به دست بیاورید سپس با استفاده از توان چشمه صوت، فاصله را محاسبه کنید.

درس نامه شدت صوت در فاصله ۱۲ از چشمه صوت:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

توان چشمه صوت (W)

شدت صوت (W/m²)

فاصله از چشمه صوت (m)

تراز شدت صوت (dB)

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

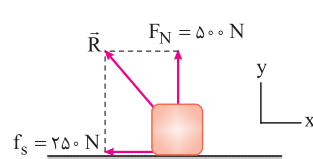
تراز شدت صوت

$$I = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

گام ۳ ابتدا شدت صوت چشمه صوت (I) را با استفاده از تراز شدت صوت محاسبه می کنیم.

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \xrightarrow{\beta=80 \text{ dB}, I_0=10^{-12} \text{ W/m}^2} 80 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$$

$$\Rightarrow 8 = \log \frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow 10^8 = \frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow I = 10^{-4} \text{ W/m}^2$$



گام ۳ سطح به جسم دو نیروی عمودی سطح (F_N) و نیروی اصطکاک (f_s) را وارد می کند؛ بنابراین با توجه به شکل روبه رو، بردار نیرویی را که سطح به جسم وارد می کند، می نویسیم.

$$\vec{R} = \vec{f}_s + \vec{F}_N \Rightarrow \vec{R} = -250\vec{i} + 500\vec{j} \text{ (SI)}$$

سؤال از ما نیرویی را که جسم به سطح وارد می کند، پرسیده است. نیرویی که جسم به سطح وارد می کند ($\vec{R}'$) و نیرویی که سطح به جسم وارد می کند ($\vec{R}$)، کنش و واکنش اند، پس نیرویی که جسم به سطح وارد می کند در SI برابر است با:

$$\vec{R}' = -\vec{R} \Rightarrow \vec{R}' = 250\vec{i} - 500\vec{j}$$

تیزبازی سؤال از ما نیرویی را که جسم به سطح وارد می کند، می خواهد؛ پس باید به خاطر واکنش نیروی اصطکاک، مؤلفه ای در جهت محور X (یعنی $\vec{i}$) داشته باشیم. تنها گزینه ای که این شرایط را دارد، $(\frac{1}{5})$ است.

تله سؤال از شما نیرویی را که جسم به سطح وارد می کند، پرسیده است، نه نیرویی که سطح به جسم وارد می کند! اگر عجله کنید، $(\frac{1}{5})$ منتظر شماست.



گزینه ۴

درس نامه ۱ شیب مماس بر نمودار سرعت - زمان در هر لحظه، بیانگر شتاب متحرک در آن لحظه است.

۲ قانون دوم نیوتون:

جرم (kg) $\uparrow$
 $F_{\text{net}} = ma$
 شتاب (m/s^2) $\downarrow$ نیروی خالص (N)

شیب مماس بر نمودار سرعت - زمان در هر لحظه بیانگر شتاب متحرک در آن لحظه است؛ بنابراین با توجه به شکل روبه رو، اندازه شتاب متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 ابتدا کاهش سپس افزایش می یابد. از طرفی طبق قانون دوم نیوتون، شتاب متحرک متناسب با نیروی خالص وارد بر متحرک است؛ پس بزرگی نیروی خالص وارد بر این متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 مانند بزرگی شتاب آن در این بازه زمانی، ابتدا کاهش سپس افزایش می یابد.



گزینه ۴

شفاف سازی شتاب مرکزگرای ناشی از چرخش ماهواره، همان شتاب گرانش در محل ماهواره است.

درس نامه اگر شتاب گرانش در فاصله r_1 از مرکز زمین برابر با g_1 و در فاصله r_2 از مرکز زمین برابر با g_2 باشد، رابطه نسبتی زیر برقرار است.

$$\frac{g_2}{g_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

گام ۳ در حالت اول، فاصله ماهواره تا سطح زمین به اندازه شعاع زمین (R_e) است (شکل الف).



(الف)

در حالت دوم، فاصله ماهواره تا سطح زمین به اندازه $1/5 R_e$ برابر شعاع زمین ($1/5 R_e$) است (شکل ب).



(ب)

در حرکت ماهواره، شتاب گرانش، شتاب مرکزگرای ماهواره را تأمین می کند. حالا کافی است داده ها را در رابطه زیر جای گذاری کنیم تا ببینیم شتاب گرانش چگونه تغییر می کند.

$$\frac{g_2}{g_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \xrightarrow{r_1=R_e, r_2=\frac{1}{5}R_e} \frac{g_2}{g_1} = \left(\frac{R_e}{\frac{1}{5}R_e}\right)^2 = \left(\frac{5}{1}\right)^2 = \left(\frac{16}{1}\right) = 16$$

16



گام ۳ حالا اختلاف این دو طول موج را محاسبه می‌کنیم.

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{5625}{4} - \frac{4800}{4} = \frac{825}{4} \text{ nm}$$

گزینه ۳

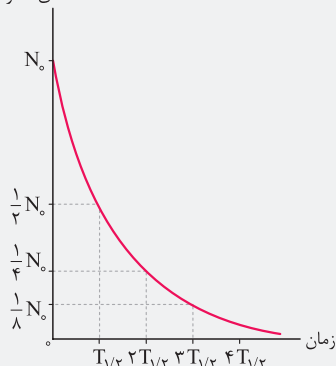
شفاف‌سازی تعداد هسته‌های ماده A در طی ۳ روز به نصف مقدار اولیه می‌رسد، پس نیمه‌عمر ماده A، ۳ روز است.

درس‌نامه نیمه‌عمر: اگر تعداد هسته‌های مادر اولیه در یک نمونه پرتوزا N_0 باشد، تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده پس از مدت‌زمان t ، از رابطه زیر به دست می‌آید.

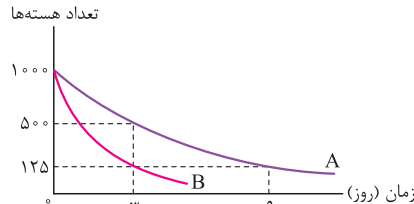
تعداد هسته‌های باقی‌مانده

$$N = \frac{N_0}{2^n} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{تعداد هسته‌های اولیه} \end{matrix} \quad \begin{matrix} n = \frac{t}{T} \rightarrow (s) \\ \text{نیمه‌عمر} \end{matrix}$$

تعداد هسته‌های مادر پرتوزا



گام ۴ با توجه به نمودار، تعداد هسته‌های ماده A پس از ۳ روز از ۱۰۰۰ به ۱۲۵ (نصف مقدار اولیه خود) می‌رسد؛ بنابراین نیمه‌عمر ماده A، ۳ روز است ($T_A = 3$).



$$n = \frac{t}{T_A} = \frac{9 \text{ روز}}{3 \text{ روز}} \Rightarrow n = \frac{9}{3} = 3$$

$$N = \frac{N_0}{2^n} \xrightarrow[n=3]{N_0=1000} N = \frac{1000}{2^3} = \frac{1000}{8} = 125$$

گام ۵ تعداد هسته‌های ماده B پس از ۳ روز از ۱۰۰۰ به ۱۲۵ می‌رسد. با توجه به این موضوع، نیمه‌عمر ماده B را به دست می‌آوریم.

$$N = \frac{N_0}{2^n} \xrightarrow[n=3]{N=125, N_0=1000} \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^n = 8 = 2^3 \Rightarrow n = 3$$

$$n = \frac{t}{T_B} \xrightarrow[t=3 \text{ روز}]{n=3} 3 = \frac{3}{T_B} \Rightarrow T_B = 1 \text{ روز}$$

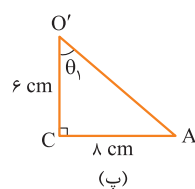
گام ۶ حالا می‌توانیم مدت‌زمانی را که طول می‌کشد تا $\frac{1}{32}$ هسته‌های B فعال باقی بماند، به دست بیاوریم.

$$N = \frac{N_0}{2^n} \xrightarrow[n=5]{N=\frac{1}{32}N_0} \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} \Rightarrow 2^n = 32 = 2^5 \Rightarrow n = 5$$

$$n = \frac{t}{T_B} \xrightarrow[T_B=1 \text{ روز}]{n=5} 5 = \frac{t}{1} \Rightarrow t = 5 \text{ روز}$$

گزینه ۴

شفاف‌سازی ۱ بار الکتریکی موجود در هر سانتی‌متر مربع از سطح کره برحسب پیکوکولن یعنی چگالی بار آن را برحسب pC/cm^2 به دست بیاوریم. عدد ۱۵۷ که در صورت سؤال داده شده است، دقیقاً نصف ۳۱۴ است. این عدد به نوعی آلام می‌دهد که عدد π را برابر ۳/۱۴ در نظر بگیریم.



گام ۷ در ادامه به سراغ مثلث $O'CA$ می‌رویم (شکل پ) و با استفاده از رابطه فیثاغورس، اندازه $O'A$ را محاسبه می‌کنیم تا بتوانیم $\sin \theta_1$ را به دست بیاوریم.

$$O'A^2 : O'A^2 = O'C^2 + AC^2 \Rightarrow O'A^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow O'A = 10 \text{ cm}$$

$$\sin \hat{O}' = \sin \theta_1 = \frac{AC}{O'A} = \frac{8}{10} = 0.8$$

گام ۸ حالا می‌توانیم ضریب شکست محیط شفاف را با استفاده از قانون شکست اسنل محاسبه کنیم:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \xrightarrow[\sin \theta_2 = \sin 30^\circ = 0.5, n_1 = 1]{\sin \theta_1 = \sin i = 0.8} \frac{n_2}{1} = \frac{0.8}{0.5} = \frac{4}{3}$$

مشاوره برای حل این سؤال، علاوه بر فیزیک، باید هندسه هم بلد باشید. از سؤالاتی مثل این سؤال که برای حل آن به کمی خلاقیت نیاز دارید، رد شوید و در آخر اگر وقت آوردید به سراغ آن بروید.

گزینه ۱

درس‌نامه در اثر فوتوالکتریک، انرژی جنبشی سریع‌ترین فوتوالکترن‌های گسیل شده از سطح فلز، از رابطه زیر به دست می‌آید. تبدی انتشار موج در خلأ (m/s) ثابت پلانک (eV.s)

$$K_{\max} = h \frac{c}{\lambda} - W_0$$

(m) طول موج فوتون (eV) تابع کار فلز

کافی است داده‌ها را در رابطه زیر جای گذاری کنیم و λ را محاسبه کنیم (هواستون باشه که سؤال از ما λ رو بر حسب μm می‌فواد).

$$K_{\max} = h \frac{c}{\lambda} - W_0 \Rightarrow 4/4 = \frac{4 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^8}{\lambda} - 2/8$$

$$\Rightarrow 7/2 = \frac{12 \times 10^{-7}}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6} \times 10^{-6} \text{ m} = \frac{1}{6} \mu\text{m}$$

گزینه ۳

شفاف‌سازی عدد کوانتومی دومین و سومین خط طیفی اتم هیدروژن در رشته پاشن به ترتیب برابر با $n_1 = 5$ و $n_2 = 6$ است.

درس‌نامه طول موج خط‌های طیف گسیلی اتم هیدروژن در هر رشته:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), n_2 > n_1$$

شماره رشته

در این رابطه، طول موج (λ) برحسب نانومتر (nm) است.

گام ۱

نکته اگر بخواهیم عدد کوانتومی (n) خط طیف گسیلی اتم هیدروژن در هر رشته (n') را با استفاده از شماره خط طیفی آن رشته به دست بیاوریم، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

مثلاً عدد کوانتومی (n) پنجمین خط طیف گسیلی اتم هیدروژن در رشته بالمر ($n' = 2$) برابر است با:

$$n = n' + 5 = 7$$

با توجه به نکته بالا، عدد کوانتومی دومین و سومین خط طیفی اتم هیدروژن در رشته پاشن ($n' = 3$) به ترتیب برابر با $n_1 = 3 + 2 = 5$ و $n_2 = 3 + 3 = 6$ است. با جای گذاری داده‌ها در رابطه زیر، طول موج دومین و سومین خط طیفی اتم هیدروژن در رشته پاشن

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{100} \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{100} \times \frac{25 \times 9}{16} = \frac{5625}{40000}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 100 \times \frac{40000}{5625} = \frac{5625}{16} \text{ nm}$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{100} \left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{9^2} \right) \Rightarrow \lambda_2 = 100 \times \frac{36 \times 9}{36} = 1200 \text{ nm}$$



۶۳- گزینه ۱

انرژی ذخیره شده در خازن: **درس نامه ۱**

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

ظرفیت (F) ↑
اختلاف پتانسیل (V) ↓

رابطه اختلاف پتانسیل دو سر خازن با بار الکتریکی و ظرفیت آن:

$$V = \frac{Q}{C} \rightarrow (C) \text{ بار الکتریکی} \rightarrow (F) \text{ ظرفیت}$$

گام ۱ ابتدا نسبت انرژی خازن در حالت دوم به حالت اول را به دست می آوریم سپس با استفاده از تغییر انرژی خازن (ΔU)، انرژی اولیه خازن (U_1) را محاسبه می کنیم.

$$U = \frac{1}{2} C V^2 \xrightarrow{C \text{ ثابت}} \frac{U_2}{U_1} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2 \xrightarrow{V_2 = 1/5 V_1} \frac{U_2}{U_1} = \left(\frac{1/5 V_1}{V_1} \right)^2 = \frac{1}{25}$$

$$\xrightarrow{U_2 = U_1 + 200 \mu J} \frac{U_1 + 200}{U_1} = \frac{1}{25} \Rightarrow 9U_1 = 4U_1 + 800 \Rightarrow U_1 = 160 \mu J$$

گام ۲ حالا با توجه به ثابت بودن ظرفیت خازن (C) در دو حالت می توانیم بنویسیم:

$$Q = CV \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{5} \xrightarrow{Q_2 = Q_1 + 200 \mu C} \frac{Q_1 + 200}{Q_1} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5Q_1 = Q_1 + 200 \Rightarrow Q_1 = 40 \mu C$$

گام ۳ در آخر با جای گذاری داده ها در رابطه زیر، ظرفیت خازن را محاسبه می کنیم (در این رابطه می توانیم همه کمیت ها را با پیشوند میکرو قرار بدهیم).

$$U_1 = \frac{Q_1^2}{2C} \xrightarrow{U_1 = 160 \mu J, Q_1 = 40 \mu C} 160 = \frac{40^2}{2C} \Rightarrow 2C = 10 \Rightarrow C = 5 \mu F$$



۶۴- گزینه ۱

درس نامه ۱ تعریف مقاومت الکتریکی: نسبت اختلاف پتانسیل دو سر یک رسانا به جریان الکتریکی عبوری از آن:

$$R = \frac{V}{I} \rightarrow (V) \text{ اختلاف پتانسیل الکتریکی} \rightarrow (A) \text{ جریان الکتریکی}$$

مقاومت الکتریکی (Ω)

۲ مقاومت معادل دو مقاومت متوالی:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

جریان الکتریکی عبوری از مقاومت های متوالی یکسان است.

۳ مقاومت معادل دو مقاومت موازی:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

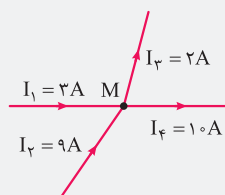
اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت های موازی یکسان است:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow R_1 I_1 = R_2 I_2$$

۴ جریان خروجی از باتری:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r}$$

نیروی محرکه مولد (V) ↑
مقاومت درونی (Ω) ↓
مقاومت معادل خارجی (Ω) ↓



۵ قاعده انشعاب: مجموع جریان هایی که به هر نقطه انشعاب (گره) وارد می شوند، برابر با مجموع جریان هایی است که از آن نقطه انشعاب (گره) خارج می شوند؛ مثلاً در شکل روبه رو، جریان $I_1 + I_2 = 12A$ به گره M وارد شده و جریان $I_3 + I_4 = 12A$ از آن خارج شده است.

۶ توان مصرفی مقاومت الکتریکی:

$$P = R I^2 = \frac{V^2}{R} \rightarrow (V) \text{ اختلاف پتانسیل} \rightarrow (A) \text{ جریان}$$

مقاومت الکتریکی (Ω) ↓
مقاومت (Ω) ↓

درس نامه چگالی سطحی بار الکتریکی رسانا:

$$\sigma = \frac{Q}{A} \rightarrow (C) \text{ بار الکتریکی موجود در سطح} \rightarrow (m^2) \text{ مساحت سطح}$$

سؤال از ما چگالی سطحی بار الکتریکی کره را بر حسب pC/cm^2 می خواهد؛ بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi r^2} \Rightarrow \sigma = \frac{157 \times 10^{-3} pC}{4 \times 3.14 \times 5 \times 5 cm^2} = 500 pC/cm^2$$

یعنی بار الکتریکی موجود در هر سانتی متر مربع از سطح این کره برابر با 500 پیکوکولن است.



۶۲- گزینه ۱

استراتژی ۱ ابتدا بزرگی و جهت میدان الکتریکی حاصل از هر یک از بارهای

q_1 و q_2 در حالت اول را به دست بیاورید سپس با استفاده از اصل برهم نهی میدان های الکتریکی، میدان خالص آن ها در نقطه O (E_1) را پیدا کنید. **۲** بارهای الکتریکی هر ذره را پس از انتقال 50% از بار q_2 به q_1 (q'_1 و q'_2) محاسبه کنید. **۳** در حالت دوم نیز میدان الکتریکی خالص ناشی از بارهای q'_1 و q'_2 در نقطه O (E_2) را به دست آورده و در پایان نسبت $\frac{E_2}{E_1}$ را تعیین کنید.

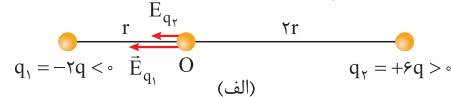
درس نامه ۱ اندازه میدان الکتریکی حاصل از بار نقطه ای q در فاصله r از آن:

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \rightarrow (C) \text{ اندازه میدان الکتریکی} \rightarrow (N/C) \text{ اندازه میدان الکتریکی}$$

فاصله (m) ↓
ثابت کولن ↓

۲ جهت میدان الکتریکی، از بارهای مثبت رو به خارج و به سوی بارهای منفی است.

گام ۱ در حالت اول با فرض ($q > 0$)، میدان الکتریکی حاصل از هر یک از بارها در نقطه O و هم چنین میدان الکتریکی خالص را به دست می آوریم (شکل الف):



$$E = k \frac{|q|}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} E_{q_1} = k \frac{|-2q|}{r^2} = 2k \frac{q}{r^2} \\ E_{q_2} = k \frac{|6q|}{(2r)^2} = \frac{3}{2} k \frac{q}{r^2} \end{cases}$$

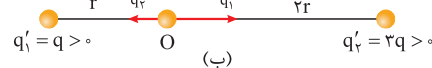
$$\Rightarrow E_1 = E_{q_1} + E_{q_2} \Rightarrow E_1 = k \frac{q}{r^2} \left(2 + \frac{3}{2} \right) = \frac{7}{2} k \frac{q}{r^2}$$

گام ۲ پس از انتقال 50% از بار q_2 به q_1 ، بار جدید هر یک از آن ها را محاسبه می کنیم:

$$q'_1 = q_1 + \frac{50}{100} q_2 = -2q + \frac{1}{2} \times 6q = q$$

$$q'_2 = q_2 - \frac{50}{100} q_2 = \frac{1}{2} q_2 = \frac{1}{2} \times 6q = 3q$$

گام ۳ در حالت جدید نیز میدان الکتریکی حاصل از بارهای q'_1 و q'_2 در نقطه O را به دست می آوریم (شکل ب):



$$E = k \frac{|q|}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} E_{q'_1} = k \frac{|q|}{r^2} = k \frac{q}{r^2} \\ E_{q'_2} = k \frac{|3q|}{(2r)^2} = k \frac{3q}{4r^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_2 = E_{q'_1} - E_{q'_2} = k \frac{q}{r^2} - k \frac{3q}{4r^2} \Rightarrow E_2 = \frac{1}{4} k \frac{q}{r^2}$$

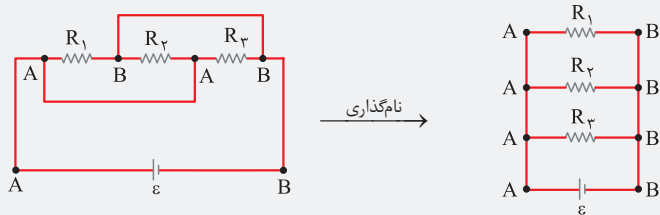
$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{1}{4} k \frac{q}{r^2}}{\frac{7}{2} k \frac{q}{r^2}} = \frac{1}{14}$$

در آخر خواسته سؤال یعنی نسبت $\frac{E_2}{E_1}$ را به دست می آوریم:

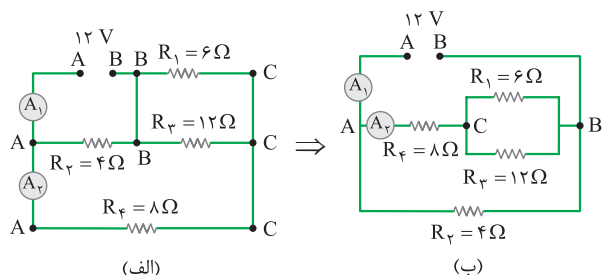
۶۵- گزینه ۳

درس نامه ساده کردن شکل مدار به روش نام گذاری نقاط هم پتانسیل:

برای این کار، نقاطی از مدار را که با سیم به یکدیگر وصل شده اند با یک نام مشترک در نظر می گیریم. بعد از نام گذاری چنین نقاطی، دو سر مدار یا دو سر مولد را مبنا قرار می دهیم و سایر اجزای مدار را بین نقطه های نام گذاری شده جای گذاری می کنیم تا شکل ساده تری از مدار به دست بیاید.



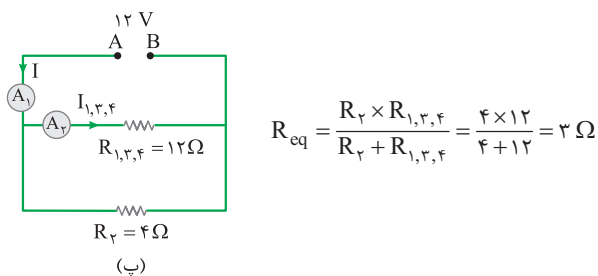
گام ۱ نقاط هم پتانسیل را نام گذاری می کنیم (شکل الف) و شکل ساده تری از مدار را رسم می کنیم (شکل ب). (مقاومت آمپر سنج آرمانی صفر است و مانند یک سیم بدون مقاومت در مدار عمل می کند).



گام ۲ در شکل (ب)، R_1 و R_3 موازی هستند و حاصل آن ها با R_2 متوالی بسته شده است؛ پس مقاومت معادل آن ها برابر است با:

$$R_{1,3,2} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + R_2 = \frac{6 \times 12}{6 + 12} + 8 = 12 \Omega$$

در نتیجه مقاومت معادل مدار را می توانیم به دست بیاوریم (شکل پ):



گام ۳ مقاومت های R_1 و R_3 به صورت موازی به مولد وصل شده اند؛ پس اختلاف پتانسیل دو سر آن ها با هم برابر است. همچنین آمپر سنج A_1 جریان I و آمپر سنج A_2 جریان $I_{1,3,2}$ را نشان می دهند. جریانی را که هر آمپر سنج نشان می دهد، به دست می آوریم.

$$I = \frac{V}{R} \Rightarrow \begin{cases} I = \frac{V_{AB}}{R_{eq}} = \frac{12}{3} = 4 \text{ A} \\ I_{1,3,2} = \frac{V_{AB}}{R_{1,3,2}} = \frac{12}{12} = 1 \text{ A} \end{cases}$$

تیز بازی با توجه به شکل مدار در صورت سؤال، مقاومت $R_2 = 4 \Omega$ با مولد به صورت موازی بسته شده است؛ بنابراین مقاومت معادل مدار باید کمتر از 4Ω باشد.

$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R_{eq}} \xrightarrow{\frac{V_{AB}=12 \text{ V}}{R_{eq} < 4 \Omega}} I_1 > 3 \text{ A}$$

بنابراین با توجه به گزینه ها، $I_1 = 4 \text{ A}$ است.

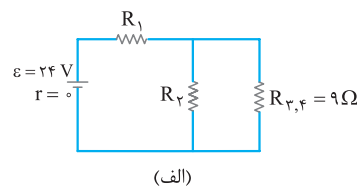
$$I_2 = \frac{V_{AB}}{R_2} = \frac{12}{4} = 3 \text{ A}$$

هم چنین داریم:

گام ۴ دو مقاومت R_2 و R_3 متوالی هستند پس جریان الکتریکی یکسانی از آن ها عبور می کند. با توجه به این که توان مصرفی آن ها نیز برابر است، می توانیم بنویسیم:

$$P_2 = P_3 \xrightarrow{P=RI^2} R_2 I_2^2 = R_3 I_3^2 \xrightarrow{I_2=I_3} R_2 = 4 / 5 \Omega$$

گام ۵ در شاخه سمت راست مدار داریم (شکل الف):



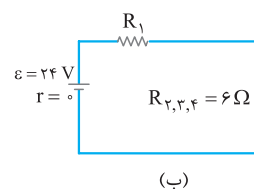
$$R_{2,3} = R_2 + R_3 = 4 / 5 + 4 / 5 = 9 \Omega$$

توان مصرفی مقاومت $R_{2,3}$: $P_{2,3} = P_2 + P_3 \xrightarrow{P_2=P_3=P} P_{2,3} = 2P$

هم چنین مقاومت $R_{2,3}$ با مقاومت R_1 موازی است؛ پس اختلاف پتانسیل یکسانی دارند؛ در نتیجه می توانیم بنویسیم:

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow \frac{P_2}{R_{2,3}} = \frac{R_{2,3}}{R_1} \Rightarrow \frac{P}{2P} = \frac{9}{R_1} \Rightarrow R_1 = 18 \Omega$$

گام ۶ حالا مدار را ساده تر می کنیم (شکل ب):



$$R_{1,2,3,4} = \frac{R_1 \times R_{2,3,4}}{R_1 + R_{2,3,4}} = \frac{18 \times 9}{18 + 9} = 6 \Omega$$

توان مصرفی مقاومت $R_{1,2,3,4}$: $P_{1,2,3,4} = P_1 + P_{2,3,4} = P + 2P = 3P$

مقاومت R_1 با مقاومت $R_{2,3,4}$ متوالی است و جریان یکسانی از آن ها می گذرد؛ پس می توانیم با توجه به توان مصرفی آن ها بنویسیم:

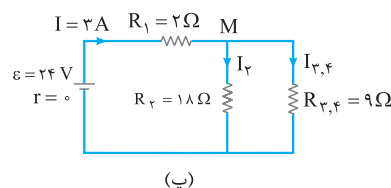
$$P = RI^2 \Rightarrow \frac{P_1}{R_1} = \frac{P_{2,3,4}}{R_{2,3,4}} \Rightarrow \frac{P}{R_1} = \frac{3P}{6} \Rightarrow R_1 = 2 \Omega$$

گام ۷ در ادامه مقاومت معادل مدار و جریان خروجی از باتری را محاسبه می کنیم.

$$R_{eq} = R_1 + R_{2,3,4} = 2 + 6 = 8 \Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \xrightarrow{\frac{\varepsilon=24 \text{ V}}{R_{eq}=8 \Omega, r=0 \Omega}} I = \frac{24}{8} = 3 \text{ A}$$

گام ۸ دو مقاومت R_2 و R_3 موازی هستند؛ پس اختلاف پتانسیل دو سر آن ها یکسان است. بنابراین می توانیم بنویسیم (شکل پ):



$$V_2 = V_{2,3} \xrightarrow{V=RI} R_2 I_2 = R_{2,3} I_{2,3}$$

$$\xrightarrow{\frac{R_2=18 \Omega}{R_{2,3}=9 \Omega}} 18 I_2 = 9 I_{2,3} \Rightarrow I_{2,3} = 2 I_2$$

گام ۹ قاعده انشعاب در گره M را می نویسیم و جریان الکتریکی عبوری از مقاومت R_2 را پیدا می کنیم:

$$I = I_2 + I_{2,3} \xrightarrow{\frac{I=3 \text{ A}}{I_{2,3}=2 I_2}} 3 = I_2 + 2 I_2 \Rightarrow I_2 = 1 \text{ A}$$

مشاوره این تست از سؤال های وقت گیر کنکور است و اگر نتوانستید در زمان استاندارد به آن پاسخ بدهید، خود را سرزنش نکنید.

تله اگر به منفی بودن بار الکترون توجه نکنیم، در تشخیص جهت نیروی مغناطیسی و جهت میدان الکتریکی به مشکل برمیخوریم و ① و ③ منتظر ما هستند.

۶۸- گزینه ۴

درس نامه ① شار مغناطیسی عبوری از درون حلقه:

مساحت حلقه (m²)
 $\Phi = BA \cos \theta$
 زاویه بین بردار میدان مغناطیسی و نیم خط عمود بر سطح حلقه
 میدان مغناطیسی (T)
 دو جهت برای رسم نیم خط عمود بر سطح حلقه می توانیم در نظر بگیریم اما در حل سؤال، باید یکی را انتخاب کنیم و تا پایان تغییر ندهیم.
 تغییرات شار مغناطیسی (Wb)
 نیروی محرکه القایی متوسط برای پیچه یا سیم لوله ای با N حلقه،
 $\epsilon_{av} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$
 تعداد حلقه
 مدت زمان (s)

اندازه میدان مغناطیسی در هر دو حالت یکسان است اما اگر زاویه بین بردار میدان مغناطیسی و نیم خط عمود بر سطح حلقه در حالت اول $\theta_1 = 0^\circ$ باشد، در حالت دوم $\theta_2 = 180^\circ$ است. شار مغناطیسی در هر دو حالت را به دست می آوریم.

$$\Phi_1 = B_1 A_1 \cos \theta_1 \Rightarrow \Phi_1 = 0.1 \times 100 \times 10^{-4} \times 1 = 10^{-3} \text{ Wb}$$

$$\Phi_2 = B_2 A_2 \cos \theta_2 \Rightarrow \Phi_2 = 0.1 \times 100 \times 10^{-4} \times (-1) = -10^{-3} \text{ Wb}$$

حالا نیروی محرکه القایی متوسط در حلقه را به دست می آوریم.

$$\epsilon_{av} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -1 \times \left(\frac{-10^{-3} - 10^{-3}}{0.25} \right) = 8 \times 10^{-3} \text{ V} = 8 \text{ mV}$$

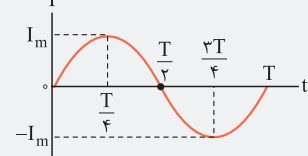
۶۹- گزینه ۱

درس نامه ① معادله جریان متناوب سینوسی بر حسب زمان:

$$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

بیشینه جریان (A)
 دوره تناوب (s)

نمودار جریان متناوب سینوسی در مدت یک دوره تناوب به صورت زیر است.



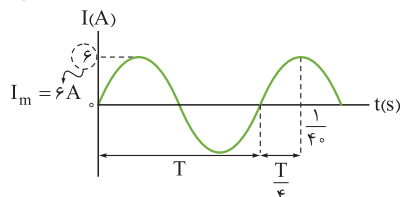
جریان عبوری از القاگر (A)

$$U = \frac{1}{2} L I^2$$

ضریب القاوری (H)

انرژی ذخیره شده در القاگر:

به کمک نمودار، دوره تناوب و بیشینه جریان را به دست می آوریم:



$$T + \frac{T}{4} = \frac{1}{f_0} \Rightarrow \frac{5T}{4} = \frac{1}{f_0} \Rightarrow T = \frac{1}{5f_0} \text{ s}$$

معادله جریان متناوب سینوسی بر حسب زمان را می نویسیم سپس جریان عبوری از القاگر در $t = \frac{1}{f_0} \text{ s}$ را محاسبه می کنیم.

$$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \Rightarrow I = 6 \sin\left(\frac{2\pi}{\frac{1}{5f_0}}t\right) = 6 \sin(100\pi t)$$

$$t = \frac{1}{f_0} \text{ s} \Rightarrow I = 6 \sin\left(100\pi \times \frac{1}{f_0}\right) = 6 \sin\left(\frac{\pi}{f_0}\right) = 3\sqrt{2} \text{ A}$$

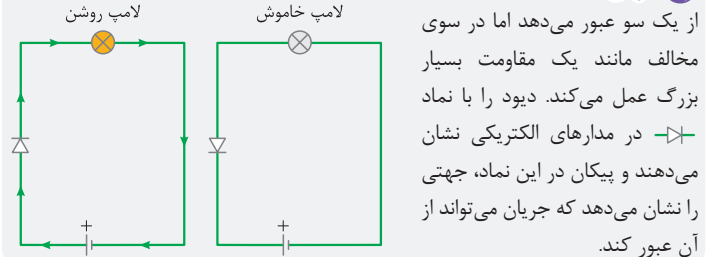
در گره A می توانیم بنویسیم:

$$I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow 4 = 3 + I_3 \Rightarrow I_3 = 1 \text{ A}$$

۶۶- گزینه ۳

شفاف سازی نماد $\ominus$ یک مولد جریان متناوب را نشان می دهد که جریان آن به طور متناوب بر حسب زمان تغییر می کند.

درس نامه دیود دایود: دیود قطعه ای است که هرگاه در مداری قرار بگیرد، جریان را تنها از یک سو عبور می دهد اما در سوی مخالف مانند یک مقاومت بسیار بزرگ عمل می کند. دیود را با نماد $\rightarrow$ در مدارهای الکتریکی نشان می دهند و پیکان در این نماد، جهتی را نشان می دهد که جریان می تواند از آن عبور کند.



هنگامی که کلید در حالت (۱) قرار دارد، جریان متناوب به طور کامل از مقاومت R عبور می کند (۱) و (۲) اما وقتی کلید در حالت (۲) قرار می گیرد جریان در یک نیم دوره در جهت دیود بوده و دیود اجازه عبور جریان را می دهد اما در نیم دوره بعدی، جریان در خلاف جهت دیود بوده و دیود اجازه عبور جریان را نمی دهد. پس ③ درست است.

۶۷- گزینه ۴

درس نامه ① اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار متحرک:

$$F_B = |q| v B \sin \theta$$

تندی (m/s)
 زاویه بین v و B
 اندازه میدان مغناطیسی (T)
 اندازه بار الکتریکی (C)

برای تعیین جهت این نیرو، از قاعده دست راست استفاده می کنیم. طبق این قاعده اگر چهار انگشت دست راست را در جهت حرکت بار مثبت ($\vec{v}$) قرار بدهیم به طوری که وقتی آن را خم می کنیم در جهت $\vec{B}$ قرار بگیرد، آن گاه انگشت شستمان جهت $\vec{F}$ را نشان می دهد. توجه کنید که نیروی وارد بر بار منفی در خلاف جهت نیروی وارد بر بار مثبت است.

بردار نیروی الکتریکی که از طرف میدان الکتریکی بر بار q وارد می شود:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

به کمک قاعده دست راست، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار را به دست می آوریم. (شکل الف) با توجه به این که، ذره باردار منفی است (پروان الکترون)، در نهایت باید جهت $\vec{F}$ را عکس کنیم؛ بنابراین جهت نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون رو به بالا است.

برای این که الکترون بدون انحراف به حرکت خود ادامه بدهد، باید نیرویی که میدان الکتریکی ($\vec{F}_E$) به ذره باردار وارد می کند، هم اندازه و در خلاف جهت نیروی ناشی از میدان مغناطیسی ($\vec{F}_B$) باشد (شکل ب). (هواستون)

بنابراین $\vec{F}_E$ باید رو به پایین باشد و طبق رابطه $\vec{F}_E = q\vec{E}$ ، چون بار الکترون منفی است، پس $\vec{E}$ و $\vec{F}_E$ در خلاف جهت هم هستند و در نتیجه جهت E به سمت بالا است. ① و ③

حالا اندازه میدان الکتریکی یکنواخت را با توجه به نکته زیر به دست می آوریم.

$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$$

نکته هر گاوس (G) معادل 10^{-4} تسلا (T) است.

$$F_E = F_B \Rightarrow E |q| = |q| v B \sin \theta$$

$$E = v B \sin \theta = 2 \times 10^5 \times 40 \times 10^{-4} \times \sin 90^\circ = 8 \times 10^2 \text{ N/C}$$



۳ انرژی مکانیکی: به مجموع انرژی جنبشی (K) و انرژی پتانسیل (U) جسم، انرژی مکانیکی می‌گوییم.

اگر از نیروهای اتلافی (مثل نیروی مقاومت هوا) صرف نظر کنیم، انرژی مکانیکی جسم پایسته می‌ماند.

تنها نیروی مؤثر، نیروی وزن است؛ پس نیروی مقاومت وارد بر موتورسوار ناچیز و انرژی مکانیکی آن پایسته است. بنابراین پایستگی انرژی مکانیکی موتورسوار را برای تپه اول و دوم می‌نویسیم (مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را سطح زمین در نظر گرفتیم).

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 \Rightarrow \frac{1}{2}(20)^2 + 10 \times 55 = \frac{1}{2}v_2^2 + 10 \times 30$$

$$\Rightarrow 200 + 550 = \frac{1}{2}v_2^2 + 300 \Rightarrow v_2^2 = 900 \Rightarrow v_2 = 30 \text{ m/s}$$

گزینه ۱ - ۷۳

درس نامه گرمای لازم برای تغییر دما:

تغییر دما ($^{\circ}\text{C}$ یا K)

$$Q = mc\Delta\theta$$

گرمای ویژه ($\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C}}$ یا $\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$)

گام ۱ مایع در هر دقیقه، 100 J گرما می‌گیرد. گرمایی را که مایع در مدت زمان ۵۶ دقیقه می‌گیرد، به دست می‌آوریم.

گام ۲ در مدت زمان ۵۶ دقیقه، دمای جسم از $\theta_1 = -39^{\circ}\text{C}$ به $\theta_2 = 41^{\circ}\text{C}$ رسیده است، با جای گذاری داده‌ها در رابطه زیر گرمای ویژه مایع را به دست می‌آوریم.

$$Q = mc\Delta\theta \xrightarrow{m=5 \text{ kg}, \Delta\theta=41-(-39)=80^{\circ}\text{C}} 5600 = 5 \times c \times 80$$

$$\Rightarrow c = \frac{5600}{40} = 140 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$$

گزینه ۳ - ۷۴

درس نامه قانون گازهای کامل (معادله حالت):

دما (کلوین) $\uparrow$ مقدار گاز (mol) $\uparrow$ فشار گاز (Pa) $\uparrow$ حجم گاز (m^3)

$$PV = nRT$$

ثابت جهانی گازهای کامل ($\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$)

با استفاده از معادله حالت و با توجه به این که فشار گاز ثابت است، می‌توانیم بنویسیم:

$$PV = nRT \xrightarrow{\text{فشار ثابت}} P(\Delta V) = nR(\Delta T)$$

تبدیل به m^3

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \times 10^5 \times (-4 \times 10^{-2}) = 3 \times 8 \times \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{-6 \times 10^2}{24} = -25 \text{ K}$$

تغییرات دما برحسب کلوین و درجه سلسیوس یکسان است، یعنی:

$$\Delta\theta = \Delta T = -25^{\circ}\text{C}$$

گزینه ۴ - ۷۵

درس نامه ۱ قانون اول ترمودینامیک:

گرما $\uparrow$ کار محیط بر روی دستگاه (گاز) $\downarrow$

$$\Delta U = Q + W$$

۲ اگر گاز پس از طی چند فرایند متوالی به حالت اولیه خود برسد، یک چرخه را طی کرده است. از آنجا که دمای ابتدا و انتهای چرخه یکسان است، تغییرات انرژی درونی گاز آرمانی در چرخه صفر است.

۳ تغییرات انرژی درونی گاز آرمانی در فرایند هم‌دما صفر است.

۴ کار انجام شده توسط محیط روی گاز:

$$W = -P\Delta V$$

در فرایند هم‌حجم، $\Delta V = 0$ است؛ بنابراین $W = 0$ هم‌حجم.

گام ۱ در آخر ضریب القاوری (L) را به دست می‌آوریم.

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \xrightarrow{U=72 \text{ mJ}=72 \times 10^{-3} \text{ J}, I=3\sqrt{2} \text{ A}} 72 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times L \times (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow 72 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times L \times 18$$

$$\Rightarrow L = 8 \times 10^{-3} \text{ H} = 8 \text{ mH}$$

گزینه ۳ - ۷۰

درس نامه فشار مایع در عمق h از سطح آزاد:

شتاب گرانش (m/s^2) $\uparrow$

$$P = \rho gh$$

عمق مایع (m) $\downarrow$ چگالی مایع (kg/m^3)

فشار در نقاط هم‌تراز A و B که در یک مایع قرار دارند، با هم برابر است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$h = 25 \text{ cm}$

$$P_A = P_B \Rightarrow P_0 + \rho_{\text{مایع}}gh = P_{\text{گاز محبوس}}$$

$$\Rightarrow 10^5 + 2 \times 10^3 \times 10 \times 0.25 = P_{\text{گاز محبوس}}$$

$$\Rightarrow 10^5 + 5 \times 10^3 = P_{\text{گاز محبوس}}$$

$$\Rightarrow P_{\text{گاز محبوس}} = 10^5 \times \frac{10}{k} \text{ Pa} = 10^5 \text{ kPa}$$

گزینه ۳ - ۷۱

استراتژی در لوله‌های U شکل، فشار در نقاط هم‌تراز و یک مایع را برابر با یکدیگر قرار بدهید و با استفاده از آن به خواسته مسئله برسید.

مطابق شکل زیر، فشار در نقاط M و N که در یک مایع (جیوه) قرار دارند و هم‌تراز هستند، برابر است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$P_M = P_N \Rightarrow P_A + P_{\text{آب}} = P_0 + P_{\text{جیوه}}$

$$\Rightarrow P_A + \rho_{\text{آب}}gh_1 = P_0 + \rho_{\text{جیوه}}gh_2$$

$h_1 = 20 \text{ cm}$, $h_2 = 50 \text{ cm}$

$$\Rightarrow P_A + 10^3 \times 10 \times 0.2 = 10^5 + 13600 \times 10 \times 0.5$$

$$\Rightarrow P_A + 2 \times 10^3 = 10^5 + 68 \times 10^3 \Rightarrow P_A = 166 \times 10^3 \text{ Pa} = 166 \text{ kPa}$$

گزینه ۳ - ۷۲

شفاف سازی تنها نیروی مؤثر، نیروی وزن است؛ یعنی نیروی مقاومت وارد بر موتورسوار ناچیز و انرژی مکانیکی آن پایسته است.

درس نامه ۱ انرژی پتانسیل گرانشی: اگر جسمی با جرم m در ارتفاع h نسبت به سطح زمین قرار بگیرد، آن‌گاه انرژی پتانسیل گرانشی آن از رابطه زیر به دست می‌آید (مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را سطح زمین فرض کردیم).

جرم (kg) $\uparrow$ ارتفاع (m) $\uparrow$

$$U = mgh$$

شتاب گرانش (m/s^2)

۲ انرژی جنبشی: انرژی جنبشی جسمی که با سرعت v در حال حرکت است، از رابطه زیر به دست می‌آید.

تندی (m/s) $\uparrow$ جرم (kg) $\downarrow$

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$



گام ۳ تغییرات انرژی درونی چرخه و فرایند هم‌دما صفر است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta U_{\text{چرخه}} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA}$$

فرایند هم‌دما

$$\Rightarrow 0 = Q_{AB} + W_{AB} + Q_{BC} + W_{BC} \Rightarrow -W_{AB} = \frac{Q_{AB} + Q_{BC}}{\text{خواسته سوال}}$$

گام ۳ برای محاسبه W_{AB} ، طبق رابطه $W = -P\Delta V$ به V_1 نیاز داریم. از آن‌جا که فرایند CA هم‌دما است، می‌توانیم بنویسیم:

$$T_A = T_C \Rightarrow \frac{P_A V_A}{nR} = \frac{P_C V_C}{nR} \Rightarrow P_A V_A = P_C V_C$$

$$\Rightarrow 1 \times 10^5 \times V_1 = 2 \times 10^5 \times 16 \Rightarrow V_1 = 4 \text{ L}$$

گام ۳ گرمای مبادله‌شده در مسیر ABC را به دست می‌آوریم:

$$Q_{AB} + Q_{BC} = -W_{AB} = -(-P\Delta V_{AB}) = P\Delta V_{AB}$$

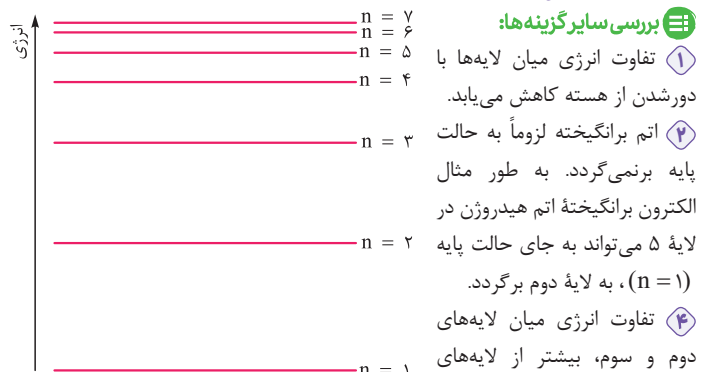
$$\Rightarrow Q_{AB} + Q_{BC} = 1 \times 10^5 \times (16 - 4) \times 10^{-3} = 9600 \text{ J}$$

تبدیل L به m^3

شیمی

۷۶ - گزینه ۳

با توجه به این که **۳** جمله کتابه، می‌بریم این گزینه را انتخاب کنیم!



سوم و چهارم است و از آن‌جا که طول موج با انرژی، رابطه وارونه دارد، طول موج انتقال $n=3 \rightarrow n=2$ ، کوتاه‌تر از انتقال $n=4 \rightarrow n=3$ است. همان‌طور که دیدیم، این گزینه هم می‌تونه درست باشه! اما انگار طراح این‌جا منظور اتم هیدروژن بوده! در اتم هیدروژن، طول موج پرتو مربوط به انتقال $n=4 \rightarrow n=3$ در گستره مرئی قرار نمی‌گیرد. در ضمن در طیف هیدروژن، انتقال $n=3 \rightarrow n=2$ مربوط به نور قرمز است که دارای بلندترین طول موج (۶۵۶ nm) است.

مشاوره بعضی وقتا پیش میاد که شما دو گزینه رو در یک سؤال، درست می‌دونید، در این مواقع گزینه‌ای رو انتخاب کنید که به شکل واضحی درست‌تر از گزینه دیگر است. الان این‌جا **۳**، چون متن کتابه، به یقین درسته و باید اونو انتخاب می‌کردین!

۷۷ - گزینه ۳

عبارت‌های اول، دوم و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها: در عنصرهای اصلی (دسته S و دسته P)، لایه ظرفیت، همان لایه آخر اتم‌ها است. الکترون‌های ظرفیت در عنصرهای دسته S، در زیرلایه ns و در عنصرهای دسته P در زیرلایه‌های ns np هستند که n شماره لایه آخر آن‌ها است. دقت کنید که در عناصر دسته d، مجموع الکترون‌های موجود در آخرین زیرلایه S (ns) و زیرلایه d موجود در لایه ماقبل $(n-1)d$ ، جزء الکترون‌های ظرفیتی هستند.

نکته طبق قاعده آقا، هر زیرلایه‌ای که $n+1$ کم‌تری داشته باشد، انرژی کم‌تری داشته و زودتر الکترون را دریافت می‌کند. اگر برای چند زیرلایه، مقدار $n+1$ برابر باشد، زیرلایه‌ای با n کوچک‌تر، انرژی کم‌تری داشته و زودتر از بقیه زیرلایه‌ها، الکترون می‌پذیرد.

مقدار $n+1$ برای هر سه زیرلایه برابر با ۷ است؛ پس می‌توان نوشت:

$$4f \Rightarrow n+1=4+3=7, \quad 5d \Rightarrow n+1=5+2=7,$$

$$6p \Rightarrow n+1=6+1=7$$

$$4f < 5d < 6p$$

♦ نه په ربطی داره؟! به طور مثال گاز نجیب نئون، ۸ الکترون ظرفیت و فلوئور، ۷ الکترون ظرفیت دارد، اما فلوئور واکنش‌پذیرتر است.

♦ گنجایش الکترونی یک زیرلایه از رابطه $2l+1$ به دست می‌آید:

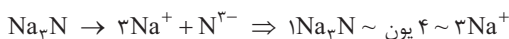
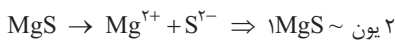
$$l=4 \Rightarrow 4(4)+1=17$$

در دوره پنجم جدول تناوبی هم، ۱۸ عنصر (۲ عنصر دسته S، ۱۰ عنصر دسته d و ۶ عنصر دسته p) وجود دارد.

♦ نه این‌طور نیست! مثلاً همه عنصرهای گروه‌های ۴ و ۱۴، ۴ الکترون ظرفیتی دارند، اما فب! شماره گروهشون فرق داره!

۷۸ - گزینه ۴

گام ۱ ابتدا دو ترکیب یونی را به یون‌های سازنده آن‌ها تجزیه می‌کنیم:



گام ۲ شمار مول یون‌ها را در ۸۴ گرم منیزیم سولفید به دست می‌آوریم:

روش ۱ استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم مولی}}{\text{جرم مولی}} = \frac{\text{مول}}{\text{مول}} \Rightarrow \frac{84}{1 \times 56} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ mol یون}$$

روش ۲ استفاده از کسر تبدیل:

$$1 \text{ mol MgS} \times \frac{1 \text{ mol MgS}}{56 \text{ g MgS}} \times \frac{2 \text{ mol یون}}{1 \text{ mol MgS}} = 2 \text{ mol یون}$$

گام ۳ شمار مول یون مثبت را در نمونه سدیم نیتريد به دست می‌آوریم:

روش ۱ استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم مولی}}{\text{جرم مولی}} = \frac{\text{مول}}{\text{مول}} \Rightarrow \frac{16/6}{1 \times 83} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 0.6 \text{ mol Na}^+$$

روش ۲ استفاده از روش کسر تبدیل:

$$1 \text{ mol Na}_3\text{N} \times \frac{1 \text{ mol Na}_3\text{N}}{83 \text{ g Na}_3\text{N}} \times \frac{3 \text{ mol Na}^+}{1 \text{ mol Na}_3\text{N}} = 0.6 \text{ mol Na}^+$$

گام ۴

نکته اگر بخواهیم نسبت شمار اتم‌ها، یون‌ها و یا مولکول‌های X را به شمار اتم‌ها، یون‌ها و یا مولکول‌های Y به دست آوریم، کافی است فقط نسبت مول‌های آن‌ها را به دست آوریم؛ یعنی می‌توان نوشت:

$$\frac{\text{تعداد X}}{\text{تعداد Y}} = \frac{\text{مول X}}{\text{مول Y}}$$

نسبت خواسته‌شده در سؤال، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\text{شمار یون‌ها در نمونه منیزیم سولفید}}{\text{شمار یون‌های مثبت در سدیم نیتريد}} = \frac{\text{مول یون‌ها در منیزیم سولفید}}{\text{مول یون‌های مثبت در سدیم نیتريد}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{0.6} = 5$$

۷۹ - گزینه ۳

درس‌نامه نام‌گذاری ترکیب‌های یونی و مولکولی:

۱ ترکیب‌های یونی: ترکیب‌های یونی اغلب از واکنش بین فلزها و نافلزها و یا یون‌های چنداتی به وجود می‌آیند. برای نام‌گذاری این ترکیب‌ها به صورت زیر عمل می‌کنیم:

«نام کاتیون و بار کاتیون با اعداد رومی در صورت لزوم + نام آنیون»

♦ فقط برای فلزهایی که بیش از یک نوع کاتیون پایدار دارند (مانند Co, Fe, Mn, Cr, V) و Cu، باید بار کاتیون با اعداد رومی داخل پرانتز نوشته شود.

مثال: MgO ← منیزیم اکسید Cr_2S_3 ← کروم (III) سولفید



مشاوره رسم ساختار لوویس را به حدی تمرین کنید که به محض دیدن یک مولکول یا یون چنداتی، فوراً و با سرعت برق و باد! ساختار تو ذهنتون بیاد و دیگه مجبور نشید کلی زمان صرف کشیدن ساختار کنید، چون ساختار لوویس پای ثابت لگوره.



۸۱- گزینه ۴

استراتژی ابتدا به کمک درصد جرمی محلول در دمای 40°C ، انحلال پذیری نمک را در این دما به دست بیار! ما انحلال پذیری نمک در دمای 50°C را نداریم! بنابراین به کمک جرم آب موجود در محلول اولیه و نهایی که ثابت است، باید مقدار رسوب و محلول باقی مانده را پیدا کنیم؛ پس بین در دمای 50°C ، چند گرم آب در محلول وجود دارد و با انحلال پذیری نمک در دمای 40°C ، حساب کن که در این مقدار آب، چند گرم نمک حل می شود.

گام ۱ انحلال پذیری پتاسیم نیترات را در دمای 40°C به دست می آوریم:

$$100 \times \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} = \text{درصد جرمی}$$

$$\Rightarrow 37/5 = \frac{S}{S+100} \times 100 \Rightarrow 62/5S = 3750$$

$$\Rightarrow S = 60 \quad (40^{\circ}\text{C} \text{ در دمای } 40^{\circ}\text{C})$$

گام ۲ مقدار نمک قابل حل در دمای 40°C را حساب می کنیم.

در 360 گرم محلول در دمای 50°C ، 162 گرم نمک و 198 گرم آب ($198 - 162 = 360$) وجود دارد. حالا ببینیم در دمای 40°C ، چند گرم پتاسیم نیترات در 198 گرم آب حل می شود:

$$198 \text{ g آب} \times \frac{60 \text{ g KNO}_3}{100 \text{ g آب}} = 118.8 \text{ g KNO}_3$$

گام ۳ جرم نمک باقی مانده در محلول و تعداد مول رسوب کرده از آن را حساب می کنیم. از 162 گرم پتاسیم نیتراتی که در دمای 50°C داریم، 118.8 گرم آن در محلول باقی می ماند و 43.2 گرم از آن ($162 - 118.8 = 43.2$) رسوب می کند.

$$43.2 \text{ g KNO}_3 \times \frac{1 \text{ mol KNO}_3}{100 \text{ g KNO}_3} = 0.432 \text{ mol KNO}_3$$



۸۲- گزینه ۳

موارد اول، سوم و چهارم درست اند. جاذبه بین مولکول های آب و اتانول از نوع هیدروژنی است. موقع انحلال اتانول در آب، پیوند هیدروژنی اتانول - اتانول و آب - آب شکسته می شود و پیوند هیدروژنی قوی تری بین مولکول های آب و اتانول برقرار می شود: اتانول - اتانول > آب - آب > اتانول: قدرت پیوند هیدروژنی



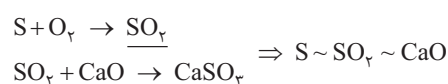
۸۳- گزینه ۲

گام ۱ ابتدا از طریق فرمول ppm می توان جرم گوگرد را محاسبه کرد.

$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم گوگرد}}{\text{جرم سوخت}} \times 10^6 \Rightarrow 6400 = \frac{x}{10 \text{ ton} \times \frac{10^6 \text{ g}}{1 \text{ ton}}} \times 10^6$$

$$\Rightarrow x = 64000 \text{ g} = 64 \text{ kg}$$

گام ۲ معادله موازنه شده سوختن گوگرد را می نویسیم، همان طور که می بینید ضریب SO_2 در دو واکنش (واکنش سوختن گوگرد و واکنش جذب آن توسط آهک) یکسان است، پس می توان به طور مستقیم بین گوگرد (S) از واکنش اول و آهک (CaO) در واکنش دوم ارتباط برقرار کنیم؛ یعنی:



$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{64}{1 \times 32} = \frac{x}{1 \times 56}$$

$$\Rightarrow x = 112 \text{ kg CaO}$$

۲ ترکیب های مولکولی: ترکیب های مولکولی اغلب از واکنش دو نافلز به وجود می آیند: نام ترکیب های مولکولی از دو بخش، به صورت زیر، تشکیل شده است:

بخش اول پیشوند یونانی نام نافلز + (زیروند نافلز + سمت چپ) «سمت چپ»
بخش دوم پیشوند یونانی نام نافلز + (زیروند نافلز + سمت راست + سمت راست + سمت چپ) «سمت چپ»
 پیشوندهای یونانی، زیروند اتم ها یا همان تعداد آن ها را در فرمول مولکولی ترکیب مشخص می کنند.

تعداد	پیشوند	تعداد	پیشوند
۱	مونو	۴	تترا
۲	دی	۵	پنتا
۳	تری	۶	هگزا



♦ دقت کنید که اگر در فرمول مولکولی یک ترکیب، تنها یک اتم از عنصر سمت چپ وجود داشته باشد، پیشوند «مونو» را برای آن به کار نمی بریم.

مثال: NO_2 نام درست: نیتروژن دی اکسید

نام غلط: مونونیتروژن دی اکسید

مواستون باشه که در نام ترکیب های یونی، برخلاف ترکیب های مولکولی، از پیشوند برای مشخص کردن تعداد یون ها، استفاده نمی شود.

جدول زیر نام ترکیب های داده شده را به همراه نوع آن ها مشخص می کند:

فرمول ترکیب	Mg_3N_2	NF_3	Cu_2O	Cr_2O_3	N_2O_4
نوع ترکیب	یونی	مولکولی	یونی	یونی	مولکولی
نام ترکیب	نیتريد	نیتروژن تری فلوراید	مس (I) اکسید	کروم (III) اکسید	تری اکسید



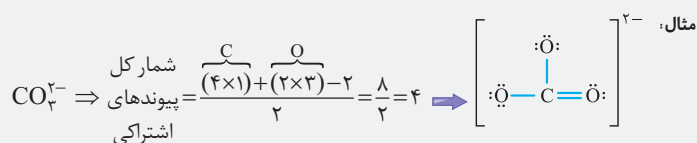
۸۰- گزینه ۱

درس نامه رسم سریع ساختار لوویس گونه ها:

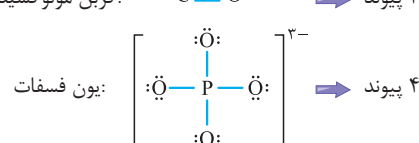
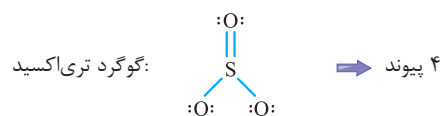
۱ ابتدا شمار کل پیوندهای اشتراکی در یک گونه را با فرمول زیر به دست می آوریم:

$$\text{شمار کل گرفتن علامت} = \left(\frac{\text{مجموع تعداد e جفت نشده}}{2} \right) + \left(\frac{\text{در آرایش الکترون - نقطه ای اتم ها}}{2} \right)$$

۲ با توجه به نوع اتم ها، اتم مرکزی را با پیوندهای یگانه، دوگانه یا سه گانه به اتم های اطراف متصل می کنیم و با گذاشتن جفت الکترون های ناپیوندی، اتم ها (به جز H) را هشت تایی می کنیم.



ساختار همه گونه ها را ببینید:

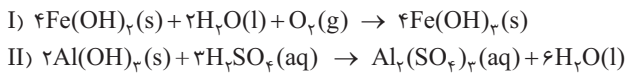




- ♦ حالت فیزیکی برم در دمای اتاق، مایع است. برم، تنها نافلز مایع بوده و هیچ یک از عناصر هم دوره و هم گروه آن مایع نیستند (فلزهای هم دوره اش هم که همگی جامدند).
- ♦ واکنش پذیری هالوژن ها، یعنی خصلت نافلزی آن ها، از بالا به پایین کاهش می یابد. در گروه ۱۷ جدول تناوبی، بیشترین واکنش پذیری مربوط به فلوئور است.

۸۵- گزینه ۳

عبارت های دوم، سوم و چهارم درست هستند.
ابتدا واکنش های داده شده را موازنه می کنیم:



بررسی عبارت ها:

بر اساس کسرهای تناسب می توان نوشت:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{تعداد ذره}}{\text{عدد آووگادرو} \times \text{ضریب}}$$

$$\frac{\text{جرم}}{\text{Fe(OH)}_3} = \frac{\text{تعداد ذره}}{\text{H}_2\text{O}}$$

$$\Rightarrow \frac{1070}{4 \times 107} = \frac{x}{2 \times 6 / 0.2 \times 10^{23}} \Rightarrow x = 30 / 1 \times 10^{23} \text{ مولکول}$$

★ نکته واکنش های اکسایش - کاهش، واکنش هایی شیمیایی هستند که در آن ها، عدد اکسایش حداقل یکی از گونه ها تغییر می کند.

♦ در واکنش اول، عدد اکسایش گونه ها تغییر کرده است؛ در نتیجه واکنش از نوع اکسایش - کاهش است. عدد اکسایش آهن در Fe(OH)_3 برابر با +۲ بوده و عدد اکسایش آن در Fe(OH)_3 برابر با +۳ است. هم چنین می دانیم که H_2SO_4 در واکنش دوم، اسیدی قوی بوده و آلومینیم هیدروکسید نیز باز است؛ بنابراین واکنش دوم از نوع خنثی شدن اسید و باز می باشد.

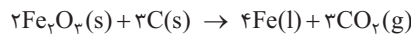
♦ بر اساس کسرهای تناسب می توان نوشت:

$$\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{m_{\text{H}_2\text{O}}}{6 \times 18} \Rightarrow m_{\text{H}_2\text{O}} = 36 \text{ g}$$

♦ بر اساس معادله های موازنه شده، مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش دهنده ها در واکنش اول برابر با ۷ بوده و مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده ها در واکنش دوم نیز برابر با ۷ است.

۸۶- گزینه ۱

گام ۱ موازنه واکنش اول به صورت زیر است:



روش ۱ استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{بازده درصدی}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$$

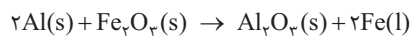
$$\frac{100}{\text{C}} = \frac{\text{جرم}}{\text{Fe}}$$

$$\Rightarrow \frac{1/8 \times 185}{1 \times 12} = \frac{x}{4 \times 56} \Rightarrow x = 9 / 52 \text{ kg Fe}$$

روش ۲ استفاده از کسر تبدیل:

$$? \text{ kg Fe} = 1/8 \text{ kg C} \times \frac{1 \text{ mol C}}{12 \text{ g C}} \times \frac{4 \text{ mol Fe}}{3 \text{ mol C}} \times \frac{56 \text{ g Fe}}{1 \text{ mol Fe}} \times \frac{185}{100} = 9 / 52 \text{ kg}$$

گام ۲ معادله موازنه شده واکنش ترمیت به صورت زیر است:



روش ۱ استفاده از کسر تناسب:

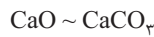
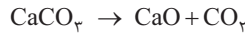
$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{9 / 52}{1 \times 56} = \frac{x'}{2 \times 27}$$

$$\Rightarrow x' = 4 / 59 \text{ kg Al}$$

روش ۲ استفاده از کسر تبدیل:

$$? \text{ kg Al} = 9 / 52 \text{ kg Fe} \times \frac{1 \text{ mol Fe}}{56 \text{ g Fe}} \times \frac{2 \text{ mol Al}}{3 \text{ mol Fe}} \times \frac{27 \text{ g Al}}{1 \text{ mol Al}} = 4 / 59 \text{ kg}$$

گام ۳ جرم کلسیم کربنات لازم برای تولید ۱۱۲ kg آهک (CaO) را حساب می کنیم:



$$\frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{100} = \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$$

$$\Rightarrow \frac{112}{1 \times 56} = \frac{x' \times 180}{1 \times 100} \Rightarrow x' = \frac{1 \times 1000}{180} = 250 \text{ kg CaCO}_3$$

تیزبازی اگر به گزینه ها دقت کنید، می بینید که قسمت دوم همه گزینه ها با هم فرق داره! پس می شه قسمت اول رو حساب نکرد!



$$\frac{64}{1 \times 32} = \frac{x \times 180}{1 \times 100} \Rightarrow x = 250 \text{ kg CaCO}_3$$

یه پور ریگه هم می شه به قضیه نگاه کرد. دو قسمت سؤال به هم مرتبط هستند و بدون محاسبه مقدار دقیق آن ها می توان نسبت آن ها را به دست آورد. اگر جرم CaO و CaCO_3 را به ترتیب X و X' در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{x}{56} = \frac{x' \times 180}{100} \Rightarrow \frac{x'}{x} = \frac{125}{56 \times 1} = \frac{125}{56} \xrightarrow{\times \frac{2}{2}} \frac{250}{112} \rightarrow \textcircled{2}$$

۸۴- گزینه ۳

عنصر X همان برم است؛ بر این اساس عبارت های اول، دوم و چهارم درست اند.

بررسی عبارت ها:

★ نکته برای تعیین شماره دوره یک عنصر در جدول تناوبی، می توان از جدول زیر استفاده کرد.

شماره دوره	محدوده عدد اتمی عنصرها
۱	۱ و ۲
۲	۳ تا ۱۰
۳	۱۱ تا ۱۸
۴	۱۹ تا ۳۶
۵	۳۷ تا ۵۴
۶	۵۵ تا ۸۶
۷	۸۷ تا ۱۱۸

♦ عنصرهایی با عدد اتمی ۱۷ و ۳۵ هر دو در گروه ۱۷ قرار دارند، زیرا عدد اتمی آن ها یک واحد کم تر از گازهای نجیب Ar و Kr (عنصرهای گروه ۱۸) است (آله شک دارین، می تونید از آرایش الکترونی استفاده کنید). از طرفی عنصرهای X و Z هر دو در دوره چهارم قرار دارند (عنصرهایی با عددهای اتمی ۱۹ تا ۳۶ در دوره چهارم قرار دارند).

♦ برم، یک نافلز است و می تواند با فلزها واکنش داده و با تبدیل شدن به آنیون برمید (Br^-)، در تشکیل ترکیب یونی شرکت کند، هم چنین می تواند الکترون های ظرفیتی خود را به اشتراک گذاشته و با تشکیل پیوند کووالانسی (اشتراکی) در تشکیل ترکیب های مولکولی شرکت کند.

مشاوره راستش این عبارت جزء عبارت های ابهام دار کنکوره. می دونیم که برم می تواند با تشکیل پیوندهای کووالانسی (اشتراکی) در تشکیل ترکیب های مولکولی شرکت کند، ولی ترکیب های مولکولی، با ترکیب های کووالانسی (مثل سیلیس، الماس، سیلیسیم کربید و ...) فرق دارند. احتمالاً طراح در این جا منظورش همون ترکیب مولکولیه.

♦ در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی کاهش می یابد. در دوره چهارم جدول تناوبی، بیشترین شعاع اتمی مربوط به اولین عنصر دوره، یعنی پتاسیم (K) است.



(ب) کاملاً درسته!

(پ) تأمین شرایط پهنه برای انجام این واکنش، بسیار دشوار و پرهزینه است. اتفاقاً این واکنش، گرماده است.

(ت) تغییر آنتالپی یک واکنش، هم‌ارز با مقدار گرمایی است که در فشار ثابت (نه حجم ثابت) با محیط پیرامون مبادله می‌شود.

۹۰- گزینه ۴

پژوه استراتژی ابتدا آنتالپی سوختن مواد (گرمای آزاد شده به ازای سوختن کامل ۱ مول ماده) رو حساب کن. بعد به کمک رابطه بین آنتالپی سوختن و ارزش سوختی، ارزش سوختی آن‌ها را به دست بیار!

گام ۳ قدرمطلق آنتالپی سوختن بنزن (C_6H_6) و اتانول (C_2H_5OH) را حساب می‌کنیم:

$$|\Delta H_{\text{سوختن}}| = \frac{64 \text{ kJ}}{0.02 \text{ mol}} = 3200 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$|\Delta H_{\text{سوختن}}| = \frac{138 \text{ kJ}}{0.01 \text{ mol}} = 13800 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

گام ۴ نسبت ارزش سوختی بنزن به اتانول را حساب می‌کنیم:

نکته بین آنتالپی سوختن و ارزش سوختی یک ماده رابطه زیر برقرار است:

$$\text{ارزش سوختی} (g \cdot g^{-1}) = \frac{|\Delta H_{\text{سوختن}}| (kJ \cdot mol^{-1})}{\text{جرم مولی} (g \cdot mol^{-1})}$$

$$\frac{\text{ارزش سوختی } C_6H_6}{\text{ارزش سوختی } C_2H_5OH} = \frac{|\Delta H_{\text{سوختن}}| C_6H_6}{|\Delta H_{\text{سوختن}}| C_2H_5OH}$$

$$\times \frac{\text{جرم مولی } C_2H_5OH}{\text{جرم مولی } C_6H_6} = \frac{3200}{13800} \times \frac{46}{78} = \frac{3200}{3 \times 78} \approx 1/37$$

گام ۵ می‌دانیم که در واکنش سوختن هیدروکربن‌ها، ضریب استوکیومتری CO_2 ، برابر با تعداد اتم‌های کربن در فرمول هیدروکربن است؛ بر این اساس نیازی به نوشتن کامل واکنش سوختن بنزن (C_6H_6) نیست و می‌توان به هم‌ارزی روبه‌رو رسید: $1C_6H_6 \sim 6CO_2$

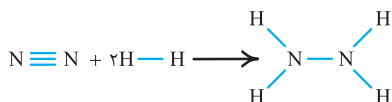
$$? \text{ mol } CO_2 = 0.02 \text{ mol } C_6H_6 \times \frac{6 \text{ mol } CO_2}{1 \text{ mol } C_6H_6} = 0.12 \text{ mol}$$

۹۱- گزینه ۲

نکته اگر همه مواد موجود در واکنش در حالت گازی باشند، می‌توان با کمک آنتالپی پیوند مواد، واکنش را به دست آورد. برای این کار از فرمول زیر استفاده می‌شود:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}]$$

گام ۱ ابتدا آنتالپی واکنش داده شده را به دست می‌آوریم:



$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\Delta H(N \equiv N) + 2\Delta H(H - H)]$$

$$- [\Delta H(N - N) + 4\Delta H(N - H)]$$

$$\Rightarrow \Delta H_{\text{واکنش}} = [941 + 2(435)] - [159 + 4(389)]$$

$$\Rightarrow \Delta H_{\text{واکنش}} = 1811 - 1715 \Rightarrow \Delta H_{\text{واکنش}} = +96 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

گام ۲ اکنون می‌توان مقدار گرمای جذب‌شده به ازای مصرف $3/0 \times 10^{25}$ مولکول هیدروژن را محاسبه کرد.

روش استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{تعداد ذره}}{\text{عدد آووگادرو} \times \text{ضریب}} = \frac{Q}{|\Delta H|} \Rightarrow \frac{3/0 \times 10^{25}}{2 \times 6/02 \times 10^{23}} = \frac{Q}{96} \Rightarrow Q = 2400 \text{ kJ}$$

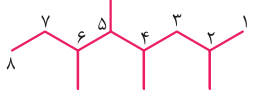
۸۷- گزینه ۲

موارد (ب) و (پ) درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها: (آ) زنجیر اصلی ۶ اتم کربن دارد و نام درست ترکیب، ۳-متیل هگزان است.

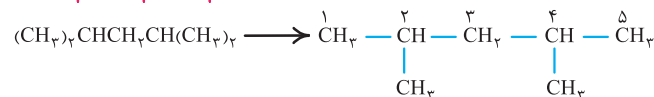
۳-متیل هگزان

(ب) کاملاً درسته!



۵-اتیل - ۲، ۴، ۶-تری‌متیل اوکتان

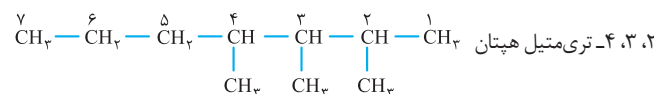
(پ) ببینید:



۴، ۲-دی‌متیل پنتان



(ت)



۴، ۳، ۲-تری‌متیل هپتان

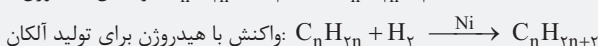
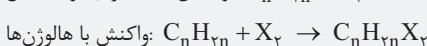
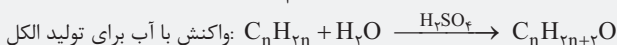
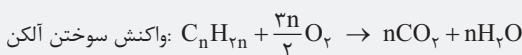
تیزبازی در نام آلکان‌ها، هیچ‌وقت «۲-اتیل» نداریم؛ پس مورد (آ) غلطه و (۱) و (۳) پُر!

بین (۲) و (۴)، (ب) و (پ) مشترک هستند و اصلاً نیازی به بررسی ندارن! یعنی در این سؤال، فقط نیاز بود که مورد (ت) رو بررسی کنیم. در این‌جا چون (ت) غلطه، جواب (۲) است.

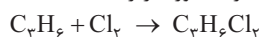
۸۸- گزینه ۲

درس‌نامه آلکان‌ها: ۱ آلکان‌ها هیدروکربن‌هایی سیرنشده با یک پیوند $C=C$

هستند. ۲ فرمول مولکولی آلکان‌ها به صورت C_nH_{2n} است. ۳ با سیکلوالکان‌های هم‌کربن، ایزومرنند. ۴ ساده‌ترین عضو آن که دارای دو اتم کربن است، اتن (اتیلن) نام دارد و فرمول مولکولی آن به صورت C_2H_4 است. ۵ برخی از واکنش‌های آن عبارتند از:



دومین عضو خانواده آلکان‌ها دارای سه اتم کربن است. این ترکیب، پروپن نام داشته و فرمول مولکولی آن به صورت C_3H_6 است. واکنش پروپن با گاز کلر به صورت زیر است:



روش استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{8/4}{1 \times 42} = \frac{m_{C_3H_6Cl_2}}{1 \times 113} \Rightarrow m_{C_3H_6Cl_2} = 22/6 \text{ g}$$

روش استفاده از کسر تبدیل:

$$? \text{ g } C_3H_6Cl_2 = 8/4 \text{ g } C_3H_6 \times \frac{1 \text{ mol } C_3H_6}{42 \text{ g } C_3H_6} \times \frac{113 \text{ g } C_3H_6Cl_2}{1 \text{ mol } C_3H_6Cl_2} = 22/6 \text{ g}$$

۸۹- گزینه ۱

عبارت‌های (آ) و (ب) درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها: (آ) به مقدار گرمای مورد نیاز برای افزایش دمای یک ماده به اندازه

یک درجه سلسیوس، ظرفیت گرمایی آن ماده می‌گویند ولی مقدار گرمای مورد نیاز برای افزایش دمای ۱ گرم از ماده به اندازه یک درجه سلسیوس، ظرفیت گرمایی ویژه (گرمای ویژه) آن ماده است. از آن‌جا که ظرفیت گرمایی ویژه همواره به ازای یک گرم ماده تعریف می‌شود، این کمیت به مقدار ماده بستگی ندارد.



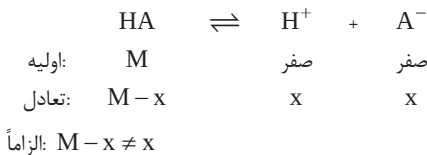
۹۵ - گزینه ۲

عبارت‌های دوم و سوم درست‌اند. بیا به همه عبارت‌ها را در دو طرفه بررسی کنیم:

♦ جامد یونی اکسیژن دار مثل Na_2O ! این اکسید فلزی، باز آرنیوس است و نه اسید!
♦ به! درسته! به طور مثال کلسیم سولفات یک ترکیب کم محلول است، اما همان مقدار که در آب حل می‌شود، به طور کامل به یون‌های سازنده‌اش تفکیک می‌شود! به همین دلیل الکترولیت قوی محسوب می‌شود.

♦ به طور مثال HCl یک ترکیب مولکولی است، اما در آب یونیده می‌شود و محلول آن رسانای قوی جریان برق است.

♦ در لحظه تعادل یونش اسید ضعیف، لزوماً غلظت مولی یون‌ها با غلظت مولکول‌های یونیده‌نشده اسید برابر نیست.



۹۶ - گزینه ۴

گام ۱ ابتدا به کمک رابطه ثابت یونش، غلظت H^+ را حساب می‌کنیم:

$$K_a = \frac{[\text{H}^+][\text{A}^-]}{[\text{HA}]} = \frac{[\text{H}^+]^2}{\text{M} - [\text{H}^+]} \Rightarrow 0.1 = \frac{x^2}{0.2 - x} \Rightarrow x^2 + 0.1x - 0.2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (0.1)^2 - 4(1)(-0.2) = 0.09$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-0.1 \pm 0.3}{2}$$

$$x_1 = -0.2 \text{ غلطی } , x_2 = 0.1 \Rightarrow [\text{H}^+] = 0.1$$

گام ۲ به کمک رابطه $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$ ، pH محلول را حساب می‌کنیم:

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] = -\log 10^{-1} = 1$$

گام ۳ نیتریک اسید یک اسید قوی بوده و در محلول آن، غلظت اسید با غلظت یون HNO_3 هیدرونیوم برابر است:

$$[\text{HNO}_3] = [\text{H}^+] = 0.1 \frac{\text{mol}}{\text{L}} \times \frac{63 \text{ g}}{1 \text{ mol}} = 6.3 \text{ g.L}^{-1}$$

۹۷ - گزینه ۳

گام ۱ استراتژی برای محاسبه غلظت Na^+ در محلول نهایی، به جرم محلول نهایی و جرم Na^+ نیاز داریم. جرم محلول نهایی به کمک حجم و چگالی آن به دست می‌آید. با رقیق‌سازی، جرم Na^+ در محلول تغییر نمی‌کند؛ بنابراین برای محاسبه جرم Na^+ باید از اطلاعات داده‌شده در مورد محلول اولیه استفاده کنی! برای قسمت دوم سؤال هم باید جرم NaOH در محلول اولیه رو به دست بیاری و واکنش آن با HCl را بنویسی!

گام ۲ جرم Na^+ در محلول نهایی را حساب می‌کنیم. با توجه به این که با رقیق‌سازی، جرم حل‌شونده تغییری نمی‌کند، جرم Na^+ در محلول نهایی با جرم آن در محلول اولیه برابر است؛ پس به کمک اطلاعات داده‌شده در مورد محلول اولیه، خواهیم داشت:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{حجم}} = \frac{\text{جرم}}{\text{حجم}} \Rightarrow \frac{\text{جرم}}{\text{حجم}} = 1.5 \text{ g.mL}^{-1} \times 4.8 \text{ mL}$$

$$= \frac{3}{4} \times 4.8 = 3.6 \text{ g (جرم محلول اولیه)}$$

$$\text{جرم محلول اولیه} = 3.6 \text{ g} \Rightarrow \text{جرم NaOH} = 3.6 \times \frac{50}{100} = 1.8 \text{ g}$$



$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی ضرب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی ضرب}} \Rightarrow \frac{1.8}{40} = \frac{x}{23} \Rightarrow x = 0.9 \times 23 \text{ g Na}^+$$

روش استفاده از کسر تبدیل:

$$1 \text{ mol H}_2 \times \frac{1 \text{ molecule H}_2}{6.02 \times 10^{23}} = 1.66 \times 10^{-24} \text{ molecule H}_2$$

$$\times \frac{96 \text{ kJ}}{2 \text{ mol H}_2} = 2400 \text{ kJ}$$

۹۲ - گزینه ۴

وزن و حجم یک محلول فقط مقدار محلول را تعیین می‌کنند و تأثیری بر خواص محلول ندارند. بررسی عبارت‌های درست:

(ب) غلظت محلول، خواص محلول را تغییر می‌دهد. به عنوان مثال، محلول ۱ مولار سدیم کلرید، رسانایی متفاوتی با محلول ۲ مولار آن دارد.

(ت) ماهیت حلال نیز در خواص محلول اثر دارد. به عنوان مثال اگر حلال آب باشد، مواد قطبی در آن حل می‌شود و اگر حلال آلی (مانند هگزان، اتانول، استون و ...) داشته باشیم، محلول غیرآبی خواهیم داشت. طبیعتاً خواص محلول سدیم کلرید در آب با خواص محلول ید در هگزان متفاوت خواهد بود.

(ث) دمای محلول بر روی خواص محلول تأثیر خواهد داشت. با افزایش یا کاهش دما می‌توان محلول را از حالت سیرشده به فراسیرشده و یا سیرنشده تبدیل کرد. دما بر روی انحلال‌پذیری حل‌شونده در حلال تأثیر خواهد گذاشت.

(ج) این که چه ماده‌ای (ماهیت حل‌شونده) در یک حلال حل شود، مهم است. به عنوان مثال اگر سدیم کلرید را در آب حل کنیم، انحلال آن یونی بوده و رسانایی الکتریکی خواهیم داشت، ولی انحلال شکر یا اتانول در آب به صورت مولکولی بوده و محلول، رسانایی الکتریکی نخواهد داشت.

گام ۱ تیزبازی راستش پاسخ‌دادن به این تست در کنکور به دلیل این که گزینه‌های مشخصی دارد، کار آسونه. حتی اگر بعضی از موارد (مثل دما، حجم و ...) هم برامون مشخص نباشه، در این حد می‌دونیم که غلظت محلول و ماهیت ماده‌ای که تو حلال حل می‌شه، روی خواص محلول اثر می‌ذاره؛ یعنی موارد (ب) و (ج) باید حتماً تو گزینه‌ها باشن و فقط (۴) اینارو داره.

۹۳ - گزینه ۳

نکته نسبت تغییر غلظت مواد در یک واکنش، متناسب با ضرایب استوکیومتری آن‌ها است. مثلاً اگر در یک بازه زمانی معین، غلظت A، ۲ واحد و غلظت B، ۱ واحد تغییر کرده باشد، می‌شه فهمید که ضریب استوکیومتری A در معادله موازنه‌شده واکنش، دو برابر ضریب استوکیومتری B است.

با گذشت زمان، غلظت A کاهش و غلظت E و D افزایش یافته است؛ بنابراین A واکنش‌دهنده و E و D فراورده هستند. می‌دانیم نسبت تغییرات غلظت مواد در یک بازه زمانی معین، با نسبت ضرایب استوکیومتری آن‌ها برابر است. به طور دلخواه، تغییرات غلظت مواد در بازه زمانی صفر تا ۳۰۰ ثانیه که محاسبات راحتی داره رو به دست می‌آوریم:

$$|\Delta[A]| = |0.12 - 0.20| = 0.08$$

$$\Delta[E] = 0.16 - 0 = 0.16$$

$$\Delta[D] = 0.04 - 0 = 0.04 \xrightarrow[\text{کوچک‌ترین عدد تقسیم می‌کنیم.}]{\text{اعداد به دست آمده را بر}} 2A \rightarrow 4E + D$$

$$\frac{\text{مجموع ضرایب فراورده‌ها}}{\text{مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

۹۴ - گزینه ۱

عبارت‌های دوم و سوم درست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت اول: پلی‌استرها و پلی‌آمیدها به کندی تجزیه می‌شوند.

عبارت چهارم: پلی‌لاکتیک اسید را از فراورده‌های کشاورزی مانند سیب‌زمینی، ذرت و نیشکر تهیه می‌کنند. شیر ترش‌شده دارای لاکتیک اسید است اما برای تهیه پلی‌لاکتیک اسید که به کار نمی‌ره!

عبارت پنجم: پلیمرهای حاصل از هیدروکربن‌های سیرنشده، ماندگارند و نسبت به پارچه‌های پلی‌آمیدی، بیشتر در طبیعت باقی می‌مانند.



۱۰۰- گزینه ۳

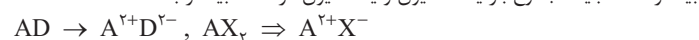
درس نامه تکنیک مقایسه آنتالپی فروپاشی شبکه بلور ترکیب‌های یونی:

به طور کلی برای مقایسه ΔH فروپاشی شبکه ترکیب‌های یونی می‌توان از روش زیر استفاده کرد:

گام ۱ هر چه مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون در یک ترکیب یونی بزرگ‌تر باشد، ΔH فروپاشی شبکه آن بزرگ‌تر است.

گام ۲ اگر مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون برای دو ترکیب یونی برابر باشد، هر چه شعاع یون‌های ترکیب یونی کوچک‌تر باشد، ΔH فروپاشی آن بزرگ‌تر است.

عبارت‌های (آ)، (ب) و (پ) درست‌اند. با توجه به این‌که آنتالپی فروپاشی AD از AX_p بیشتر است، باید مجموع بار یک کاتیون و یک آنیون در AD بیشتر باشد.



بریم سراغ عبارت‌ها:

(آ) با توجه به این‌که X و D در یک دوره جدول تناوبی قرار دارند، شعاع اتمی D (از گروه ۱۶) بزرگ‌تر از شعاع اتمی X (از گروه ۱۷) است، زیرا در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی کاهش می‌یابد.

(ب) شعاع X^{-} از D^{2-} کوچک‌تر است. (در یون‌های یک دوره، هر چه مقدار بار آنیون بیشتر باشد، شعاع آن بزرگ‌تر است.)

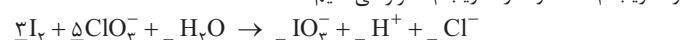
(پ) و (ت) این‌ها رو هم که گفتیم!

۱۰۱- گزینه ۴

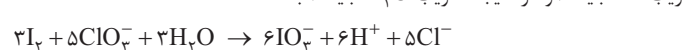
در واکنش‌های اول و چهارم، عدد اکسایش هیچ عنصری تغییر نکرده است؛ پس از نوع اکسایش - کاهش نیستند.

برای موازنه دو واکنش دیگر از روش اکسایش - کاهش استفاده می‌کنیم. به این صورت که تغییر عدد اکسایش کاهنده را ضریب اکسند و تغییر عدد اکسایش اکسند را ضریب کاهنده قرار می‌دهیم. عدد اکسایش ید از صفر در I_p به $+5$ در IO_3^{-} رسیده است. با توجه به این‌که در سمت چپ معادله، دو اتم ید داریم، تغییر عدد اکسایش آن را در ۲ ضرب می‌کنیم، می‌شه ۱۰. عدد اکسایش Cl از $+5$ در ClO_3^{-} به -1 در Cl^{-} رسیده، یعنی ۶ واحد تغییر کرده است. اعداد ۶ و ۱۰ رو آله ساده کنیم، می‌رسیم به ۳ و ۵!

۵ را ضریب ClO_3^{-} و ۳ را ضریب I_p قرار می‌دهیم:

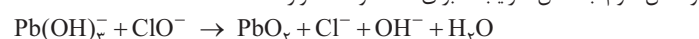


به این ترتیب باید ضریب IO_3^{-} برابر ۶ و ضریب Cl^{-} برابر ۵ باشد. برای موازنه بار هم ضریب H^{+} باید ۶ و در نتیجه ضریب H_2O باید ۳ باشد:



مجموع ضرایب گونه‌ها در این واکنش برابر با ۲۸ است.

واکنش سوم، با همان ضرایب ۱ برای همه گونه‌ها، موازنه است:



یعنی مجموع ضرایب همه گونه‌ها در آن برابر با ۶ است:

۱۰۲- گزینه ۱

درس نامه سلول گالوانی در یک نگاه!

نیم سلول کاتد	نیم سلول آند
قطب مثبت	قطب منفی
در آن نیم‌واکنش کاهش صورت می‌گیرد.	در آن نیم‌واکنش اکسایش صورت می‌گیرد.
E° آن نسبت به E° کاتد، بزرگ‌تر است.	E° آن نسبت به E° کاتد، کوچک‌تر است.
با گذشت زمان، غلظت کاتیون مربوط به کاتد در آن کم می‌شود.	با گذشت زمان، غلظت کاتیون مربوط به آند در آن زیاد می‌شود.
به طور معمول جرم تیغه افزایش می‌یابد (پای می‌شود).	به طور معمول جرم تیغه کاهش می‌یابد (لاغر می‌شود).
آنیون‌ها با عبور از دیواره متخلخل، وارد آن می‌شوند.	کاتیون‌ها با عبور از دیواره متخلخل، وارد آن می‌شوند.

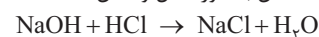
گام ۱ جرم محلول نهایی را به کمک حجم و چگالی آن حساب می‌کنیم:

$$m = 1 \text{ g.mL}^{-1} \times 75.0 \text{ mL} = 75.0 \text{ g}$$

گام ۲ غلظت ppm یون Na^{+} در محلول نهایی را حساب می‌کنیم:

$$ppm = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{0.9 \times 23}{75.0} \times 10^6 = 276.0$$

گام ۳ $NaOH$ با $7/3$ گرم HCl ناخالص به طور کامل واکنش داده است:



$$\frac{\text{جرم محلول}}{\text{جرم مولی}} = \frac{\text{جرم ناخالص}}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow \frac{3/6}{100} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 3.6$$

۹۸- گزینه ۴

استراتژی ابتدا به کمک تعداد مول H_2O^{+} و حجم محلول، $[H_2O^{+}]$ رو حساب کن. بعد به کمک رابطه $[H_2O^{+}][OH^{-}] = 10^{-14}$ و در نتیجه غلظت مولی محلول باز رو به دست بیار، برای قسمت دوم سؤال هم حواست باشه که باریم هیدروکسید، یک باز قوی دوظرفتیته!

گام ۱ غلظت مولی H^{+} را در محلول به دست می‌آوریم:

$$[H^{+}] = \frac{2/5 \times 10^{-1} \text{ mol}}{0.25 \text{ L}} = 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1}$$

گام ۲ $[OH^{-}]$ و غلظت مولی محلول MOH را به دست می‌آوریم.

$$[H^{+}][OH^{-}] = 10^{-14} \Rightarrow [OH^{-}] = \frac{10^{-14}}{10^{-9}} = 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

با توجه به این‌که MOH یک باز قوی است، غلظت مولی باز با غلظت یون هیدروکسید برابر است.

گام ۳ غلظت مولی محلول باریم هیدروکسید را حساب می‌کنیم:

در محلول باز قوی باریم هیدروکسید، غلظت یون هیدروکسید دو برابر غلظت محلول است:

$$[OH^{-}] = M.n.\alpha \Rightarrow [OH^{-}] = 2[Ba(OH)_2] \Rightarrow [Ba(OH)_2] = \frac{10^{-5}}{2} = 5 \times 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$$

۹۹- گزینه ۴

فراوان‌ترین عنصر در پوسته جامد زمین، اکسیژن بوده و بعد از آن سیلیسیم (Si ۱۴) است. عدد اتمی Si برابر با ۱۴ بوده، در نتیجه عدد اتمی عنصر X ، برابر با ۷ است؛ بر این اساس عنصر X ، معادل با نیتروژن (N ۷) است.

نکته بالاترین و پایین‌ترین عدد اکسایش نافلزها در گروه‌های ۱۴ تا ۱۷ (به جز O و F) به صورت زیر است:

شماره گروه	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴
پایین‌ترین عدد اکسایش	-۱	-۲	-۳	-۴
بالاترین عدد اکسایش	+۷	+۶	+۵	+۴

پایین‌ترین و بالاترین عدد اکسایش اکسیژن به ترتیب -2 و $+2$ است. فلوتور در همه ترکیباتش، عدد اکسایش -1 دارد.

بیشترین و کم‌ترین مقدار عدد اکسایش نیتروژن به ترتیب برابر با $+5$ و -3 است. عدد اکسایش نیتروژن در نیتریک اسید (HNO_3) برابر با $+5$ و عدد اکسایش نیتروژن در آمونیاک (NH_3) برابر با -3 است: $x + 3(-2) = 0 \Rightarrow x = +5$ و $x + 3(1) = 0 \Rightarrow x = -3$



عبارت‌های دوم و چهارم درست‌اند.

$$\Rightarrow \frac{\lambda^\circ}{2 \times 64} = \frac{x}{1 \times 22/4} = \frac{y}{2 \times 18} \Rightarrow \begin{cases} x = 14 \text{ L O}_2 \\ y = 22/5 \text{ g H}_2\text{O} \end{cases}$$

روش استفاده از کسر تبدیل:

برای به دست آوردن حجم گاز O_2 می‌توان نوشت:

$$? \text{ L O}_2 = 80 \text{ g Cu} \times \frac{1 \text{ mol Cu}}{64 \text{ g Cu}} \times \frac{1 \text{ mol O}_2}{2 \text{ mol Cu}} \times \frac{22/4 \text{ L O}_2}{1 \text{ mol O}_2} = 14 \text{ L O}_2$$

برای به دست آوردن جرم آب می‌توان نوشت:

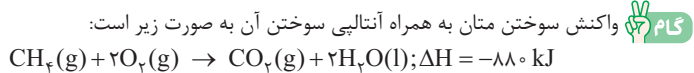
$$? \text{ g H}_2\text{O} = 80 \text{ g Cu} \times \frac{1 \text{ mol Cu}}{64 \text{ g Cu}} \times \frac{2 \text{ mol H}_2\text{O}}{2 \text{ mol Cu}} \times \frac{18 \text{ g H}_2\text{O}}{1 \text{ mol H}_2\text{O}} = 22/5 \text{ g H}_2\text{O}$$

۱۰۴ - گزینه ۱

استراتژی ابتدا از طریق فرمول $Q = mc\Delta\theta$ برای 1 kg گازوئیل، محاسبه کن که با استفاده از کاتالیزگر، چه مقدار در مصرف گرما صرفه‌جویی شده است. سپس واکنش سوختن متان را نوشته و با توجه به Q به‌دست‌آمده و ΔH واکنش سوختن متان، حجم CH_4 صرفه‌جویی‌شده و جرم CO_2 را به دست بیاور.

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow Q = 1 \times 10^3 \times (700 - 500) = 160 \text{ kJ}$$

چون جرم را برحسب kg در فرمول فوق قرار دادیم، Q نیز برحسب kJ به دست می‌آید.



روش استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{حجم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{Q}{|\Delta H|} \Rightarrow \frac{x}{1 \times 22/4} = \frac{160}{|-880|} \Rightarrow x = 4/07 \text{ L CH}_4$$

روش استفاده از کسر تبدیل:

$$? \text{ L CH}_4 = 160 \text{ kJ گرما} \times \frac{1 \text{ mol CH}_4}{880 \text{ kJ گرما}} \times \frac{22/4 \text{ L CH}_4}{1 \text{ mol CH}_4} = 4/07 \text{ L CH}_4$$

برای به دست آوردن جرم گاز CO_2 نیز می‌توان نوشت:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{Q}{|\Delta H|} \Rightarrow \frac{x}{1 \times 44} = \frac{160}{|-880|} \Rightarrow x = 8 \text{ g CO}_2$$

روش استفاده از کسر تبدیل:

$$? \text{ g CO}_2 = 160 \text{ kJ گرما} \times \frac{1 \text{ mol CO}_2}{880 \text{ kJ گرما}} \times \frac{44 \text{ g CO}_2}{1 \text{ mol CO}_2} = 8 \text{ g CO}_2$$

۱۰۵ - گزینه ۲

با توجه به نمودار، واضح و مبرهن است که واکنش گرماگیر و ΔH آن، $+a \text{ kJ}$ است. با توجه به معادله واکنش، به ازای مصرف 1 mol A ، a کیلوژول گرما نیاز است؛ بنابراین به ازای مصرف $1/a \text{ mol A}$ ، a کیلوژول گرما نیاز خواهد بود.

$$\Delta H - E_a = a - 3a = -2a$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۳) دما، انرژی فعال‌سازی واکنش را تأمین می‌کند ولی مقدار آن را نمی‌تواند تغییر دهد.

۴) انرژی فعال‌سازی واکنش، $3a$ است که کم‌ترین انرژی لازم برای انجام واکنش است.

بررسی عبارت‌ها: در این سلول، سرب که E° کم‌تری دارد، نقش آند (کاهنده) و پلاتین با E° بزرگ‌تر نقش کاتد را ایفا می‌کند.

$$E^\circ(\text{سلول}) = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) = E^\circ(\text{بزرگ‌تر}) - E^\circ(\text{کوچک‌تر})$$

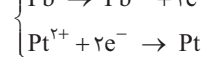
$$\Rightarrow E^\circ(\text{سلول}) = 1/2 - (-0/13) = 1/23 \text{ V}$$

هر چه E° یک نیم‌واکنش بیشتر باشد، گونه سمت چپ آن، اکسندۀ قوی‌تری است. در ضمن در سلول‌های گالوانی با اکسایش فلز در آند و تولید الکترون، سطح تیغه دارای بار منفی می‌شود.

با انجام نیم‌واکنش آندی، غلظت کاتیون در بخش آندی افزایش می‌یابد:



با انجام کامل واکنش، دو مول الکترون مبادله می‌شود:



بنابراین با پیشرفت واکنش به میزان $2/25\%$ ، $2/100 \times 2 = 0/5$ مول الکترون مبادله می‌شود:

$$0/5 \times 6/02 \times 10^{23} = 3/01 \times 10^{23}$$

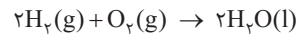
الکترون‌ها توسط مدار بیرونی (سیم) جابه‌جا می‌شوند. از دیواره متخلخل که عبور نمی‌کنند!

۱۰۳ - گزینه ۴

نیم‌واکنش اکسایش در آند انجام می‌شود. در این واکنش، مس در آند اکسید شده و به Cu^{2+} تبدیل می‌شود.



معادله واکنش سلول سوختی هیدروژن نیز به صورت زیر است:



در این واکنش، گاز O_2 با گرفتن الکترون، در کاتد کاهش می‌یابد.

نکته در یک واکنش اکسایش - کاهش می‌توان شمار مول الکترون‌های مبادله‌شده را از فرمول زیر محاسبه کرد:

$$\text{ضریب استوکیومتری} \times \text{زیروند} \times |\text{تغییر عدد اکسایش}| = \text{مول الکترون‌های مبادله‌شده}$$

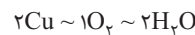
برای مثال در واکنش موازنه‌شده $2\text{Mg} + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{MgO}$ ، گونه کاهنده، منیزیم (Mg) است. عدد اکسایش آن از صفر به $+2$ رسیده، یعنی 2 واحد تغییر داشته، زیروند آن، یک و ضریب استوکیومتری آن، برابر با 2 است؛ در نتیجه می‌توان گفت در این واکنش، 4 مول الکترون مبادله شده است.

در واکنش سلول سوختی هیدروژن، 4 مول الکترون بین گونه‌های اکسندۀ و کاهندۀ مبادله شده است.

$$4 = 2 \times 2 \times 1 = 4$$

↑ ↓ ↓
ضریب زیروند تغییر عدد
استوکیومتری O_2 اکسایش

اگر نیم‌واکنش آندی $\text{Cu} \rightarrow \text{Cu}^{2+} + 2e^-$ را در 2 ضرب کنیم، ضریب الکترون‌ها در نیم‌واکنش آندی ذکرشده و واکنش سلول سوختی برابر شده و مستقیماً می‌توان بین آن‌ها ارتباط برقرار کرد و به هم‌ارزی مقابل رسید:



روش استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم گاز}}{\text{حجم گاز} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$$

Cu O_2 H_2O