

۱۴۰۰ سراسری خارج

نام درس	دهم	یازدهم	دوازدهم	ترکیبی	آسان	متوسط	سخت
ریاضیات	۲	۱۱	۱۲	۱۵	۰	۱۸	۲۲
فیزیک	۷	۱۱	۱۷	-	۶	۲۵	۴
شیمی	۹	۹	۱۰	۲	۴	۲۳	۳

ریاضیات

۱- گزینه‌ها

استراتژی ۱ اول با استفاده از قوانین لگاریتم، دو عبارت $\log_a c$ و $\log_b c$ در معادله $\log_a c + \log_b c = 1$ را معکوس کنید، بعد با مخرج مشترک‌گیری و طرفین‌وسطین، جواب را به دست آورید.

درس‌نامه برخی از قواعد لگاریتم را در ادامه ببینید: $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ (الف)

(ب) $\log_c a + \log_c b = \log_c ab$

گام ۱ لگاریتم‌های معادله $\log_a c + \log_b c = 1$ را با قاعده (الف) درس‌نامه معکوس می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \log_a c = \frac{1}{\log_c a} \\ \log_b c = \frac{1}{\log_c b} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} \frac{1}{\log_c a} + \frac{1}{\log_c b} = 1$$

گام ۲ حالا مخرج مشترک می‌گیریم و طرفین‌وسطین می‌کنیم:

$$\frac{\log_c a + \log_c b}{\log_c a \cdot \log_c b} = 1 \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} \log_c a + \log_c b = \log_c a \cdot \log_c b$$

گام ۳ در آخر با استفاده از قاعده (ب) درس‌نامه داریم:

$$\log_c a + \log_c b = \log_c a \cdot \log_c b \Rightarrow \log_c a \cdot \log_c b = \log_c ab$$

۲- گزینه ۳

استراتژی ۱ اول با استفاده از قواعد لگاریتم، لگاریتم را از بین برید تا به یک معادله نمایی برسید، بعد با استفاده از تغییر متغیر، جواب‌های معادله درجه دوم به دست می‌آیند و در آخر با محاسبه مقادیر x ، جواب حاصل می‌شود.

درس‌نامه ۱ برخی از قواعد لگاریتم را در زیر ببینید:

(الف) $\log_b a = c \Leftrightarrow a = b^c$ (ب) $\log_c a + \log_c b = \log_c ab$

۲ برخی از معادلات را می‌توانیم با تغییر متغیر مناسب، به معادله درجه ۲ تبدیل کنیم، برای مثال:

$$9^x - 12 \times 3^x + 27 = 0 \xrightarrow{3^x = t} t^2 - 12t + 27 = 0$$

$$\Rightarrow (t-3)(t-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=9 \end{cases}$$

به جای t قرار می‌دهیم 3^x تا جواب‌های معادله به دست آیند:

$$\begin{cases} 3^x = 3 \Rightarrow x=1 \\ 3^x = 9 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

گام ۱ با استفاده از قاعده ۱- (الف) درس‌نامه، لگاریتم را از عبارت داده‌شده حذف می‌کنیم:

$$\log_2(4^x + 15) = x + 3 \Rightarrow 4^x + 15 = 2^{x+3} \Rightarrow 4^x - 2^{x+3} + 15 = 0$$

$$\xrightarrow{2^{x+3} = 2^x \times 2^3 = 8 \times 2^x} 4^x - 8 \times 2^x + 15 = 0$$

گام ۲ از تغییر متغیر $t = 2^x$ استفاده می‌کنیم و ریشه‌های معادله بالا را به دست می‌آوریم:

$$t^2 - 8t + 15 = 0 \Rightarrow (t-3)(t-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=5 \end{cases}$$

تله مواظبت باشه الان یهو تکی $3 + 5 = 8$ و $\textcircled{1}$ رو بزنی! سوال جمع جواب‌های x رو می‌فواز نه جمع جواب‌های t !

به جای t قرار می‌دهیم 2^x :

$$\begin{cases} 2^x = 3 \\ 2^x = 5 \end{cases}$$

گام ۱ حالا دوباره از قاعده ۱- (الف) درس‌نامه استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2^x = 3 \\ 2^x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \log_2 3 \\ x = \log_2 5 \end{cases}$$

گام ۲ حالا می‌توانیم مجموع ریشه‌های معادله را با استفاده از قاعده ۱- (ب) درس‌نامه حساب کنیم:

$$\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 15$$

مشاوره هر سال در کنکور سراسری، حداقل یک سؤال به طور مستقیم و تعدادی سؤال به طور غیرمستقیم با استفاده از قواعد لگاریتم حل می‌شوند که پیشنهاد می‌کنم حتماً به آن‌ها مسلط باشید.

۳- گزینه ۳

استراتژی ۱ اصلاً به به توان رساندن طرفین و از بین بردن رادیکال‌ها فکر نکنید! باید دامنه معادله را محاسبه کنید.

درس‌نامه برای به دست آوردن دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج، کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهید:

گام ۱ عبارت‌های زیر دو رادیکال کوچک‌تر را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{x + \sqrt{-x^3 + 4x^2 + 25x - 100}} + \sqrt{x^2 + \sqrt{-x^2 + 6x - 8}} = x + 2$$

$$(I): -x^3 + 4x^2 + 25x - 100 \geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^3 - 4x^2 - 25x + 100 \leq 0$$

$$\Rightarrow x^2(x-4) - 25(x-4) \leq 0 \Rightarrow (x-4)(x^2-25) \leq 0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \begin{cases} x=4 \text{ (ریشه فرد)} \\ x=5 \text{ (ریشه فرد)} \\ x=-5 \text{ (ریشه فرد)} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} \begin{array}{c} -5 \quad 4 \quad 5 \\ - \quad + \quad - \quad + \end{array} \Rightarrow x \in (-\infty, -5] \cup [4, 5]$$

حالا سراغ (II) می‌رویم: $-x^2 + 6x - 8 \geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2 - 6x + 8 \leq 0$

$$\Rightarrow (x-2)(x-4) \leq 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \begin{cases} x=2 \text{ (ریشه فرد)} \\ x=4 \text{ (ریشه فرد)} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} \begin{array}{c} 2 \quad 4 \\ + \quad - \quad + \end{array} \Rightarrow x \in [2, 4]$$

گام ۲ از دو مجموعه جواب به دست آمده برای (I) و (II) اشتراک می‌گیریم:

$$(I) \cap (II) = \{4\}$$

بنابراین تنها عددی که در دامنه این معادله صدق می‌کند، $x=4$ است که باید بررسی کنیم آیا به ازای $x=4$ برقرار می‌شود یا نه:

$$\sqrt{4 + \sqrt{-4^3 + 4 \times 4^2 + 25 \times 4 - 100}} + \sqrt{4^2 + \sqrt{-4^2 + 6 \times 4 - 8}} \stackrel{?}{=} 4 + 2$$

$$\Rightarrow 2 + 4 = 6: \checkmark$$

بنابراین تنها مقداری که در این معادله صدق می‌کند $x=4$ است.

مشاوره به دست آوردن دامنه توابع و حل معادله و نامعادله جزء الفبای حل سؤالات کنکور سراسری است.



مشاوره فرمول نسبت‌های مثلثاتی سه‌آلفایی در کتاب درسی نیست اما برای پاسخ‌دادن به بعضی از سؤالات کنکور، باید به آن‌ها مسلط باشید.

گزینه ۴ - ۶

استراتژی ابتدا الگوریتم تقسیم را بنویسید، سپس از دو طرف معادله مشتق بگیرید و در آخر به جای x قرار دهید -2 تا جواب حاصل شود.

درس‌نامه ۱ اگر چندجمله‌ای $p(x)$ را بر $f(x)$ تقسیم کنیم و خارج قسمت و باقی‌مانده را به ترتیب با $q(x)$ و $r(x)$ نمایش دهیم، الگوریتم تقسیم به شکل زیر می‌شود:

$$\underbrace{p(x)}_{\text{مقسوم}} = \underbrace{f(x)q(x)}_{\text{مقسوم‌علیه}} + \underbrace{r(x)}_{\text{باقی‌مانده خارج قسمت}}$$

۲ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $ax + b$ برابر $p(-\frac{b}{a})$ می‌شود، برای مثال باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x + 7$ برابر $p(-7)$ است.

۳ مشتق عامل صفرشونده: برای به دست آوردن مشتق تابع $f.g$ در $x = \alpha$ ، اگر $f(\alpha) = 0$ باشد، کافی است که فقط از f مشتق بگیریم، به عبارت دیگر:

$$f(x).g(x) \xrightarrow{X=\alpha \text{ در مشتق}} f'(\alpha).g(\alpha)$$

برای مثال فرض کنید مشتق $(x^2 - 1)f(x)$ در $x = 1$ را می‌خواهیم، حاصل $x^2 - 1$ در $x = 1$ برابر صفر است، پس فقط از آن مشتق می‌گیریم و به جای x قرار می‌دهیم 1 :

$$(x^2 - 1)f(x) \xrightarrow{X=1 \text{ در مشتق}} 2xf(x) \xrightarrow{X=1} 2f(1)$$

عامل صفرشونده

روش گام الگوریتم تقسیم را می‌نویسیم: $p(x) = (x^2 + 2x)Q(x) + 3x + 1$ (*) باقی‌مانده خارج مقسوم‌علیه مقسوم قسمت

گام باقی‌مانده تقسیم $p'(x)$ بر $x + 2$ را می‌خواهیم که طبق مورد (۲) درس‌نامه برابر $p'(-2)$ می‌شود. حالا از دو طرف معادله (*) مشتق می‌گیریم و به جای x قرار می‌دهیم -2 (دقت کنید مقدار $2x + 2$ در $x = -2$ برابر صفر می‌شود، پس می‌توانیم از مشتق عامل صفرشونده استفاده کنیم):

$$x = -2 \rightarrow p'(-2) = -2Q(-2) + 3 = -6 + 3 = -3$$

بنابراین جواب برابر -3 می‌شود.

روش بعد از این که الگوریتم تقسیم را نوشتیم، از دو طرف معادله مشتق می‌گیریم:

$$p(x) = (x^2 + 2x)Q(x) + 3x + 1$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} p'(x) = (2x + 2)Q(x) + (x^2 + 2x)Q'(x) + 3$$

حالا به جای x قرار می‌دهیم -2 :

$$p'(-2) = -2Q(-2) + 0 \times Q'(-2) + 3$$

صفر

ادامه حل هم مثل روش قبل است.

گزینه ۲ - ۷

استراتژی کافی است چند جمله اول دنباله را بنویسید تا فرمول کلی جملات آن به دست آید.

گام چند جمله اول دنباله را می‌نویسیم:

$$a_1 = -1 = \frac{1}{-1}$$

$$a_2 = 2 - \frac{1}{a_1} = 2 - \frac{1}{-1} = 3 = \frac{3}{1}$$

$$a_3 = 2 - \frac{1}{a_2} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$a_4 = 2 - \frac{1}{a_3} = 2 - \frac{1}{\frac{5}{3}} = 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$$

$$a_5 = 2 - \frac{1}{a_4} = 2 - \frac{1}{\frac{7}{5}} = 2 - \frac{5}{7} = \frac{9}{7}$$

:

گزینه ۳ - ۴

درس‌نامه اتحادهای مثلثاتی روبه‌رو را بلد باشید: $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\begin{cases} 1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta \\ 1 - \cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta \end{cases} \quad (\text{فرمول طلایی})$$

گام ابتدا مخارج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{\sin \theta(1 - \cos \theta)}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta + 1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta(1 - \cos \theta)} = \frac{1 + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin \theta(1 - \cos \theta)}$$

گام از مورد (۲) درس‌نامه داریم:

$$\frac{1 + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin \theta(1 - \cos \theta)} = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin \theta(1 - \cos \theta)} \quad \text{مورد (۲) درس‌نامه}$$

گام حالا از مورد (۱) و (۳) درس‌نامه استفاده می‌کنیم:

$$\frac{2 \sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2}$$

تیزبازی اگر به جای θ قرار دهیم 60° ، داریم:

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin 60^\circ}{1 - \cos 60^\circ} + \frac{1 + \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

حالا فقط حاصل (۳) به ازای $\theta = 60^\circ$ برابر $2\sqrt{3}$ می‌شود.

گزینه ۲ - ۵

درس‌نامه ۱ نسبت‌های مثلثاتی 3α به صورت زیر هستند:

$$\text{الف) } \begin{cases} \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \\ \sin 3\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha + \sin \alpha \end{cases}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} \cos 3\alpha = -3 \cos \alpha + 4 \cos^3 \alpha \\ \cos 3\alpha = 2 \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos \alpha \end{cases}$$

۲ جواب معادله‌های مثلثاتی خاص به شکل زیرند:

الف) $\sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = k\pi$
ب) $\sin \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
پ) $\sin \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$
ت) $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}$
ث) $\cos \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi$
ج) $\cos \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi + \pi$

گام با استفاده از مورد (۱) درس‌نامه داریم: $2 \sin x \cdot \cos 2x + \sin x = 1 \Rightarrow \sin 3x = 1$

گام حالا به کمک مورد (۲) درس‌نامه جواب‌های این معادله را به دست می‌آوریم:

$$\sin 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{x \in [0, 2\pi]}{k = 0, 1, 2} \rightarrow \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{6} \xrightarrow{\text{مجموع جوابها}} \frac{15\pi}{6} = \frac{5\pi}{2}$$



گام ۳ ابتدا با استفاده از مورد (۱) درس‌نامه، ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{(12 + \sqrt{[x]} - [x])} \right) - 1 = \log_{2^{-1}} (12 + \sqrt{[x]} - [x])^{-1} - 1$$

$$= \frac{1}{-1} \log_2 (12 + \sqrt{[x]} - [x]) - 1$$

به جای ۱ قرار می‌دهیم $\log_2 2$:

$$\log_2 (12 + \sqrt{[x]} - [x]) - \log_2 2 = \log_2 \left(\frac{12 + \sqrt{[x]} - [x]}{2} \right)$$

گام ۴ ضابطهٔ f را در بازهٔ $(\log_2 3, \log_2 5)$ قرار می‌دهیم:

$$\log_2 3 < \log_2 \left(\frac{12 + \sqrt{[x]} - [x]}{2} \right) < \log_2 5$$

طبق مورد ۱- (پ) درس‌نامه داریم:

$$3 < \frac{12 + \sqrt{[x]} - [x]}{2} < 5 \xrightarrow{\times 2} 6 < 12 + \sqrt{[x]} - [x] < 10$$

$$\xrightarrow{-12} -6 < \sqrt{[x]} - [x] < -2$$

گام ۵ از تغییر متغیر $\sqrt{[x]} = t$ استفاده می‌کنیم:

$$-6 < t - t^2 < -2 \xrightarrow{\times (-1)} 2 < t^2 - t < 6$$

گام ۶ یک بار سمت راست نامعادله و بار دیگر سمت چپ آن را حل می‌کنیم و اشتراک می‌گیریم:

$$2 < t^2 - t \Rightarrow t^2 - t - 2 > 0 \Rightarrow (t-2)(t+1) > 0$$

جدول تعیین علامت $\rightarrow$

-1	+2
+	-
-	+

$$\Rightarrow t \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \quad (I)$$

$$t^2 - t < 6 \Rightarrow t^2 - t - 6 < 0 \Rightarrow (t-3)(t+2) < 0$$

جدول تعیین علامت $\rightarrow$

-2	+3
+	-
-	+

$$\Rightarrow t \in (-2, +3) \quad (II)$$

حالا از بازه‌های (I) و (II) اشتراک می‌گیریم:

$$(I) \cap (II): t \in (-2, -1) \cup (2, 3)$$

گام ۷ به جای t قرار می‌دهیم $\sqrt{[x]}$ ، پس:

$$\sqrt{[x]} \in (-2, -1) \cup (2, 3)$$

اما دقت کنید $\sqrt{[x]}$ نامنفی است، پس نمی‌تواند در بازهٔ $(-2, -1)$ باشد، بنابراین

$$2 < \sqrt{[x]} < 3 \xrightarrow{\text{توان } 2} 4 < [x] < 9$$

$\sqrt{[x]} \in (2, 3)$ می‌شود:

گام ۸ یک بار سمت چپ و بار دیگر سمت راست این نامعادله را حل می‌کنیم و اشتراک می‌گیریم:

$$\begin{cases} 4 < [x] \xrightarrow{[x] \in \mathbb{Z}} 5 \leq [x] \Rightarrow 5 \leq x \\ 9 > [x] \xrightarrow{[x] \in \mathbb{Z}} [x] \leq 8 \Rightarrow x < 9 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 5 \leq x < 9$$

$$\Rightarrow x \in [5, 9)$$

متأسفانه جواب در بین گزینه‌ها نیست!

مشاوره متأسفانه تقریباً هر سال در کنکور سراسری، در درس ریاضی تعدادی از سؤالات نادرست هستند، پس اگر سر جلسهٔ کنکور با سؤالی مواجه شدید که مطمئن نبودید سؤال درست است یا غلط، یا این‌که جوابتان در گزینه‌ها نبود، آن سؤال را رها کنید.

۱۰- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ اگر f تابعی صعودی باشد، $f(x) + k$ و $\sqrt{f(x)}$ هم صعودی می‌شود.

۲ اگر f تابعی صعودی اکید باشد، محل تقاطع f و f^{-1} روی نیمساز ربع اول و سوم قرار می‌گیرد.

۳ برخی از قواعد انتقال توابع را در زیر ببینید:

(الف) اگر تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم انتقال دهیم، $f(x) + k$ حاصل می‌شود، برای مثال اگر f را 2 واحد بالا ببریم $f(x) + 2$ و یا اگر f را 3 واحد پایین ببریم، $f(x) - 3$ حاصل می‌شود.

(ب) اگر تابع $f(x)$ را k واحد ($k > 0$) به سمت راست ببریم $f(x - k)$ و اگر k واحد به سمت چپ ببریم $f(x + k)$ حاصل می‌شود.

(پ) اگر تابع $f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم، $-f(x)$ حاصل می‌شود.

گام ۱ با توجه به جملات به دست آمده، متوجه می‌شویم صورت کسر $\ln n$ برابر $\ln$ عدد فرد و مخرج آن، 2 واحد از صورت آن کم‌تر است، به عبارت دیگر فرمول کلی جملات این دنباله به صورت $a_n = \frac{2n-1}{2n-3}$ می‌شود.

گام ۲ با توجه به فرمول کلی به دست آمده، صد جملهٔ اول این دنباله به صورت زیر می‌شوند $(a_{100} = \frac{2 \times 100 - 1}{2 \times 100 - 3} = \frac{199}{197})$ که با ضرب آن‌ها در یکدیگر، فقط صورت جملهٔ 100 ام، یعنی 199 و مخرج جملهٔ اول، یعنی 1 باقی می‌ماند که حاصل برابر 199 می‌شود:

$$\frac{1}{1} \times \frac{3}{1} \times \frac{5}{3} \times \frac{7}{5} \times \frac{9}{7} \times \dots \times \frac{197}{195} \times \frac{199}{197} = \frac{199}{1} = 199$$

۸- گزینه ۴

استراتژی ابتدا با تغییر متغیر $t = \sqrt{5 \sin^2 x - 1}$ ، ضابطهٔ f را ساده‌تر کنید، حالا f تابعی صعودی است (پراشو توی پاسخ می‌بینید)، سپس با به دست آوردن حداقل و حداکثر t و جای‌گذاری آن در ضابطهٔ f ، برد تابع حاصل می‌شود.

درس‌نامه ۱ محدودهٔ تغییرات $\sin x$ و $\sin^2 x$ به صورت زیر است:

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad 0 \leq \sin^2 x \leq 1$$

۲ در توابع نمایی به شکل $y = a^x$ داریم:

(الف) اگر $a > 1$ ، تابع اکیداً صعودی است.

(ب) اگر $0 < a < 1$ ، تابع اکیداً نزولی است.

۳ اگر f تابعی اکیداً صعودی و پیوسته با دامنهٔ $[a, b]$ باشد، برد f بازهٔ $[f(a), f(b)]$ می‌شود.

گام ۱ برای ساده‌تر شدن ضابطه، از تغییر متغیر $t = \sqrt{5 \sin^2 x - 1}$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = 2 - \sqrt{5 \sin^2 x - 1} = 2^t$$

گام ۲ محدودهٔ تغییرات t را به دست می‌آوریم:

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 5 \sin^2 x \leq 5 \Rightarrow -1 \leq 5 \sin^2 x - 1 \leq 4$$

زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد، پس: $0 \leq \sqrt{5 \sin^2 x - 1} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 5 \sin^2 x - 1 \leq 4$

$$\Rightarrow -2 \leq -\sqrt{5 \sin^2 x - 1} \leq 0 \Rightarrow -2 \leq t \leq 0$$

گام ۳ با توجه به مورد (۳) درس‌نامه (این‌که 2^t تابعی اکیداً صعودی و پیوسته است)، با جای‌گذاری حداقل و حداکثر مقدار t در 2^t ، حداقل و حداکثر مقدار f حاصل می‌شود:

$$f(x) = 2^t \Rightarrow \begin{cases} t = -2 \Rightarrow f(x) = 2^{-2} = \frac{1}{4} \\ t = 0 \Rightarrow f(x) = 2^0 = 1 \end{cases}$$

بنابراین برد تابع به صورت $[\frac{1}{4}, 1]$ شده و $\frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$ و $b + a = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ می‌شود.

مشاوره برای به دست آوردن برد توابعی که مشتق آن‌ها را بلد نیستیم، یکی از بهترین ایده‌ها، استفاده از تغییر متغیر است.

۹- گزینه ۴

استراتژی اول ضابطهٔ f را با کمک قواعد لگاریتم ساده کنید، بعد ضابطهٔ f را در بازهٔ $(\log_2 3, \log_2 5)$ قرار دهید و با حل نامعادلهٔ حاصل، محدودهٔ x را به دست آورید.

درس‌نامه ۱ برخی از قواعد لگاریتم را در زیر ببینید:

$$\text{(الف)} \quad \log_b a^m = \frac{m}{n} \log_b a$$

$$\text{(ب)} \quad \log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$$

$$\text{(پ)} \quad \log_a y < \log_a x \Rightarrow \begin{cases} a > 1 \Rightarrow y < x \\ 0 < a < 1 \Rightarrow y > x \end{cases}$$

۲ برای به دست آوردن دامنهٔ توابع لگاریتمی به شکل $y = \log_a$ باید نامعادلهٔ > 0 را حل کنیم.

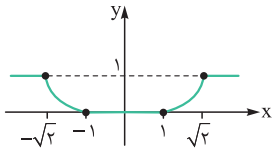


گام ۱ حالا محور اعداد را با $\pm\sqrt{2}$ و ± 1 (مرزهای fog و gof) تفکیک می‌کنیم و ضابطه fog - gof را می‌نویسیم:

	$-\sqrt{2}$	-1	1	$\sqrt{2}$
gof	۰	۰	$1-x^2$	۰
fog	-1	$1-x^2$	$1-x^2$	$1-x^2$
gof - fog	1	x^2-1	۰	x^2-1

بنابراین ضابطه fog - gof به شکل زیر است:

$$y = \begin{cases} 1 & x < -\sqrt{2} \text{ یا } x > \sqrt{2} \\ x^2 - 1 & -\sqrt{2} \leq x < -1 \text{ یا } 1 < x \leq \sqrt{2} \\ 0 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



گام ۲ تابع را رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار رسم‌شده، حداکثر مقدار این تابع برابر ۱ است.

مشاوره سر جلسه کنکور سراسری، ابتدا سراغ سؤالاتی بروید که زمان کمی برای حل‌شدن نیاز دارند و در آخر سراغ سؤالات وقت‌گیر (مثل این سؤال) بروید!

۱۲- گزینه ۱

استراتژی ابتدا پراکت را از بین ببرید، سپس با استفاده از هم‌ارزی‌های مثلثاتی جواب حاصل می‌شود.

درس‌نامه وقتی $u \rightarrow 0$ ، هم‌ارزی‌های مثلثاتی مقابل را داریم: $\sin u \approx u$ و $1 - \cos u \approx \frac{u^2}{2}$

گام ۱ $x \rightarrow 0^+$ است، پس $[x] = 0$ و در نتیجه $\tan[x] = 0$ می‌شود.

گام ۲ دقت کنید وقتی $x \rightarrow 0^+$ ، $\sin$ کمان $\sqrt{1-x^3}-1$ یعنی $\sqrt{1-x^3}-1$ هم به سمت صفر می‌رود، پس می‌توانیم از هم‌ارزی سینوس استفاده کنیم:

از طرفی وقتی $x \rightarrow 0^+$ ، $\cos$ کمان $\sqrt{3x}$ یعنی $\sqrt{3x}$ هم به سمت صفر می‌رود، پس از هم‌ارزی کسینوس هم می‌توانیم استفاده کنیم:

گام ۳ حالا مقادیر به دست آمده در گام (۱) و (۲) را در عبارت اصلی جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1) - 2 \tan[x]}{x^n (1 - \cos \sqrt{3x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x^n \times \frac{\sqrt{3x}}{2}}$$

گام ۴ صورت و مخرج عبارت را در مزدوج صورت آن ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x^n \times \frac{\sqrt{3x}}{2}} \times \frac{\sqrt{1-x^3}+1}{\sqrt{1-x^3}+1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x^3-1}{\frac{3}{2} x^{n+1} (\sqrt{1-x^3}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^3}{3x^{n+1}} = a$$

گام ۵ حالا برای این که حد $\frac{-x^3}{3x^{n+1}}$ در $x \rightarrow 0^+$ برابر یک عدد حقیقی مخالف صفر باشد، باید $n+1=3$ و در نتیجه $n=2$ شود، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^3}{3x^3} = -\frac{1}{3} = a$$

بنابراین $a^n = (-\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ می‌شود.

مشاوره رفع ابهام صفرصفرم، جزء پای ثابت‌های کنکورهای سراسری است که حل‌کردن سؤالات آن بدون استفاده از هم‌ارزی‌های مثلثاتی و هوپیتال، گاهی اوقات بسیار زمان‌بر می‌شود.

گام ۱ اگر نمودار $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}+3}$ را k واحد در راستای قائم انتقال دهیم، $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}+3} + k$ حاصل می‌شود.

گام ۲ دقت کنید f تابعی صعودی اکید است، زیرا: (مورد (۱) درس‌نامه)

$$\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x}+3 \Rightarrow \sqrt{\sqrt{x}+3} \Rightarrow f = \sqrt{\sqrt{x}+3}+k$$

صعودی صعودی صعودی صعودی

گام ۳ طبق مورد (۲) درس‌نامه، محل تقاطع f و f^{-1} روی نیمساز ناحیه اول و سوم قرار دارد. عرض نقطه تلاقی f و f^{-1} ، ۱ است، پس طول آن هم ۱ می‌شود، به عبارت دیگر:

$$f(1) = 1 \xrightarrow{f(x)=\sqrt{\sqrt{x}+3}+k} \sqrt{\sqrt{1}+3}+k = 1 \Rightarrow 2+k = 1 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{\sqrt{x}+3}-1$$

گام ۴ حالا منحنی حاصل، یعنی f را نسبت به محور x ها قرینه و ۴ واحد به سمت چپ

$$f(x) \xrightarrow[\text{محور } x]{\text{قرینه نسبت به}} -f(x) = -\sqrt{\sqrt{x}+3}+1$$

می‌بریم:

$$\xrightarrow[\text{سمت چپ}]{\text{۴ واحد به}} -f(x+4) = -\sqrt{\sqrt{x+4}+3}+1$$

گام ۵ در آخر باید بررسی کنیم که کدام‌یک از نقاط روی منحنی $y = -\sqrt{\sqrt{x+4}+3}+1$

قرار دارد که این نقطه $(0, 1-\sqrt{5})$ است، ببینید:

$$y = -\sqrt{\sqrt{x+4}+3}+1 \xrightarrow{x=0} y = -\sqrt{\sqrt{0+4}+3}+1 = 1-\sqrt{5}$$

۱۱- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ برای تشکیل تابع fog، کافی است به جای x های تابع f ، ضابطه g را قرار دهیم.

$$\begin{cases} x^2 > a \Rightarrow x < -\sqrt{a} \text{ یا } x > \sqrt{a} \\ x^2 < a \Rightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a} \end{cases}$$

(a مثبت است.)

گام ۱ ابتدا ضابطه fog را تشکیل می‌دهیم (به جای تمام x های f قرار می‌دهیم g):

$$f(g(x)) = \begin{cases} -1 & g(x) < -1 \\ g(x) & -1 \leq g(x) \leq 1 \\ 1 & g(x) > 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{g(x)=1-x^2} f(g(x)) = \begin{cases} -1 & 1-x^2 < -1 & \text{(I)} \\ 1-x^2 & -1 \leq 1-x^2 \leq 1 & \text{(II)} \\ 1 & 1-x^2 > 1 & \text{(III)} \end{cases}$$

نامعادله‌های (I)، (II) و (III) را حل می‌کنیم تا ضابطه ساده‌تر شود:

$$(I): 1-x^2 < -1 \Rightarrow \frac{2}{x^2} < x \Rightarrow x < -\sqrt{2} \text{ یا } x > \sqrt{2}$$

$$(II): -1 \leq 1-x^2 \leq 1 \xrightarrow{\times(-1)} -1 \leq x^2-1 \leq 1$$

$$\xrightarrow{+1} 0 \leq x^2 \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

$$(III): 1-x^2 > 1 \xrightarrow{\times(-1)} x^2-1 < -1 \Rightarrow x^2 < 0 \Rightarrow \text{تهی!}$$

بنابراین ضابطه $f(g(x))$ به صورت زیر می‌شود:

$$f(g(x)) = \begin{cases} -1 & x < -\sqrt{2} \text{ یا } x > \sqrt{2} \\ 1-x^2 & -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ 1 & \text{تهی!} \end{cases}$$

گام ۲ ضابطه $g(f(x))$ را هم به دست می‌آوریم:

$$g(x) = 1-x^2 \Rightarrow g(f(x)) = 1-f^2(x) \Rightarrow g(f(x)) = \begin{cases} 1-(-1)^2 & x < -1 \\ 1-x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 1-(1)^2 & x > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1-x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$



گام ۳ مقادیر f در $[0, 2\pi]$ را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: اگر $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ (همان $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$) باشد، $\sin^2 x = 1$ است، پس:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sin^2 x)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1^n = 1$$

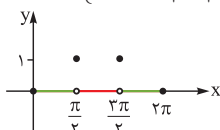
حالت دوم: اگر $x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$ (همان $x \neq \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$) باشد، $0 \leq \sin^2 x < 1$ است، پس

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sin^2 x)^n = 0$$

طبق مورد (۲) درس‌نامه داریم:

گام ۴ بنابراین می‌توانیم ضابطه f در $[0, 2\pi]$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{\pi}{4} \text{ یا } \frac{5\pi}{4} \\ 0 & x \neq \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$



نمودار f به شکل مقابل است که با توجه به آن فقط دو نقطه ناپیوستگی داریم.

۱۵- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ اگر f تابعی صعودی اکید باشد، نقاط تلاقی f و f^{-1} روی نیمساز ربع

اول و سوم قرار دارند، یعنی برای به دست آوردن نقاط تقاطع f و f^{-1} ، کافی است معادله $f(x) = x$ را حل کنیم. (۲) برای به دست آوردن ضابطه وارون f ، کافی است جای x و y را

عوض و سپس y را تنها کنیم، برای مثال:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x} + 1 \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض}} x = \sqrt[3]{y} + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{y} = x - 1 \Rightarrow y = (x - 1)^3 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x - 1)^3$$

(۳) شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه‌ای به طول $x = \alpha$ واقع بر آن برابر $f'(\alpha)$ است.

(۴) تانژانت زاویه بین دو خط با شیب‌های m و m' برابر است با: (α) زاویه بین دو خط است.

$$\tan \alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right|$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

گام ۱ واضح است که $f(x) = \sqrt{x} + 2$ تابعی صعودی اکید است، پس برای به دست

آوردن نقاط تلاقی f و f^{-1} ، معادله $f(x) = x$ را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{x} + 2 = x \Rightarrow \sqrt{x} = x - 2 \xrightarrow{\text{توان } 2} x = x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases} \checkmark$$

گام ۲ شیب خط مماس بر f در $x = 4$ برابر است با:

$$f(x) = \sqrt{x} + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}$$

برای به دست آوردن شیب خط مماس بر f^{-1} در $x = 4$ ، ابتدا باید ضابطه f^{-1} را محاسبه کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x} + 2 \Rightarrow y = \sqrt{x} + 2 \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض}} x = \sqrt{y} + 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{y} = x - 2 \xrightarrow{\text{توان } 2} y = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 4$$

حالا مشتق f^{-1} در $x = 4$ را به دست می‌آوریم: $(f^{-1}(4))' = 4 \Rightarrow (f^{-1}(x))' = 2x - 4 \Rightarrow (f^{-1}(x))' = 4$

گام ۳ با توجه به مورد (۴) درس‌نامه، اگر فرض کنیم زاویه بین دو خط مماس بر f و f^{-1}

$$\tan \alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right| = \left| \frac{\frac{1}{4} - 4}{1 + \frac{1}{4} \cdot 4} \right| = \frac{15}{5} = 3$$

گام ۴ در آخر با استفاده از مورد (۵) درس‌نامه، $\sin 2\alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{15}{5}}{1 + \frac{225}{25}} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{24}{5}} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

۱۳- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ اگر مجموع ضرایب چندجمله‌ای $p(x)$ برابر صفر باشد، یکی از ریشه‌های چندجمله‌ای، $x = 1$ شده و $p(x)$ بر $x - 1$ بخش‌پذیر می‌شود.

(۲) در توابع کسری به شکل $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، برای پیدا کردن مجانب قائم، به دنبال ریشه‌هایی از مخرج هستیم که حاصل صورت در آن‌ها برابر یک عدد حقیقی ناصفر شود (ریشه‌هایی از صورت و مخرج که با هم ساده می‌شوند، مجانب قائم نیستند) و برای پیدا کردن مجانب افقی، حد در بی‌نهایت کسر را محاسبه می‌کنیم.

(۳) مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ برابر $S = -\frac{b}{a}$ می‌شود.

گام ۱ مجموع ضرایب $x^3 - 5x + 4$ برابر صفر است، پس (طبق مورد (۱) درس‌نامه)

می‌توانیم آن را به $x - 1$ تقسیم کنیم:

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x + 4 \quad | \quad x - 1 \\ - (x^3 + x^2 - 4x - 4) \\ \hline x^2 - 5x + 4 \\ - (x^2 + x - 4) \\ \hline -4x + 4 \\ - (-4x + 4) \\ \hline 0 \end{array}$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$x^3 - 5x + 4 = (x - 1)(x^2 + x - 4)$$

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x^2 + x - 4)}{(x - a)(2x - 1)^2}$$

پس ضابطه $f(x)$ به این صورت می‌شود:

گام ۲ اگر فرض کنیم ریشه‌های معادله $x^2 + x - 4 = 0$ ، α و β باشند، می‌توانیم بنویسیم:

$$x^2 + x - 4 = (x - \alpha)(x - \beta)$$

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x - \alpha)(x - \beta)}{(x - a)(2x - 1)^2}$$

بنابراین:

گام ۳ حد تابع f در ∞ را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - 1)(x - \alpha)(x - \beta)}{(x - a)(2x - 1)^2} \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \times x \times x}{x \times (2x)^2} = \frac{1}{4}$$

بنابراین f ، یک مجانب افقی به معادله $y = \frac{1}{4}$ دارد. از طرفی عبارت $(2x - 1)^2$ که در مخرج کسر است، با صورت ساده نمی‌شود و مخرج حتماً ریشه $x = \frac{1}{2}$ دارد، بنابراین $x = \frac{1}{2}$ نیز مجانب قائم f است؛ یعنی تا این‌جا دقیقاً دو مجانب داریم.

گام ۴ حالا برای این‌که تابع مجانب دیگری نداشته باشد، دو حالت داریم:

حالت اول: ریشه $x - a$ در مخرج همان $x = \frac{1}{2}$ باشد که در این صورت $a = \frac{1}{2}$ می‌شود.

حالت دوم: $x - a$ با یکی از عبارت‌های صورت ساده شود، یعنی a می‌تواند برابر ۱ (اگر $a = 1$ باشد، $x - a$ مخرج با $x - 1$ صورت ساده می‌شود)، α (اگر $a = \alpha$ باشد، $x - a$ با $x - \alpha$ ساده می‌شود) یا β (اگر $a = \beta$ باشد، $x - a$ با $x - \beta$ ساده می‌شود) باشد.

گام ۵ مجموع مقادیر a را می‌خواهیم که برابر است با: $\alpha + \beta$ برابر مجموع ریشه‌های

$$x^2 + x - 4 = 0 \text{ است که } -1 \text{ می‌شود.}$$

$$\frac{1}{2} + 1 + \underbrace{\alpha + \beta}_{-1} = \frac{1}{2}$$

۱۴- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ اگر $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ باشد، $\sin^2 x = 1$ می‌شود ولی اگر $x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$

باشد، $0 \leq \sin^2 x < 1$ است.

(۲) اگر $0 \leq a < 1$ باشد، داریم:

گام ۱ ابتدا ضابطه تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^{2n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sin^2 x)^n$$



۱۸- گزینه ۱

درس نامه در تابع چندضابطه‌ای f :

الف) برای به دست آوردن طول نقاط مینیمم نسبی و ماکزیمم نسبی، از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم، به این صورت که مشتق f را تعیین علامت می‌کنیم، حالا هر جا که علامت مشتق از منفی به مثبت عوض شد مینیمم نسبی و هر جا که علامت مشتق از مثبت به منفی عوض شد ماکزیمم نسبی داریم (در نقاطی که تغییر علامت رخ نمی‌دهند نه ماکزیمم نسبی داریم و نه مینیمم نسبی). برای مثال اگر جدول تعیین علامت f' به شکل زیر باشد، داریم:

a	b	c	d
+	+	-	-
	+	-	+

تغییر علامت از منفی به مثبت، پس $x=b$ ماکزیمم نسبی است.
تغییر علامت از مثبت به منفی، پس $x=d$ مینیمم نسبی است.

ب) برای به دست آوردن طول نقاط عطف، مشتق دوم f'' را برابر صفر قرار می‌دهیم، ریشه‌های مرتبه فرد این معادله، طول نقاط عطف هستند.

گام ۱ ابتدا جدول تعیین علامت f' را رسم می‌کنیم تا طول نقاط مینیمم نسبی f را پیدا کنیم:

$f(x) = x^4 - 6x^2 + 5 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$
جدول تعیین علامت f'
$\begin{array}{c} -\sqrt{3} \quad 0 \quad \sqrt{3} \\ - \quad + \quad - \quad + \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \\ \text{min} \quad \quad \text{min} \\ \text{نسبی} \quad \quad \text{نسبی} \end{array}$

گام ۲ طول نقاط $\min$ نسبی $x = \sqrt{3}$ و $x = -\sqrt{3}$ است، حالا مختصات نقاط $\min$ نسبی را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(\sqrt{3}) = -4 \Rightarrow A(\sqrt{3}, -4) \\ f(-\sqrt{3}) = -4 \Rightarrow B(-\sqrt{3}, -4) \end{cases}$$

عرض این دو نقطه یکسان است، پس شیب خط AB برابر صفر می‌شود.

گام ۳ معادله $f'' = 0$ را حل می‌کنیم تا طول نقاط عطف حاصل شوند:

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 12(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = +1 \\ x = -1 \end{cases}$$

مختصات نقاط عطف به صورت مقابل‌اند:

$$\begin{cases} f(1) = 0 \Rightarrow C(1, 0) \\ f(-1) = 0 \Rightarrow D(-1, 0) \end{cases}$$

عرض این دو نقطه هم یکسان است، پس شیب خط CD نیز برابر صفر می‌شود.

گام ۴ دیدیم که شیب دو خط گذرنده از AB و CD با هم برابر است، پس این دو خط موازی‌اند و زاویه بین آن‌ها صفر می‌شود.

۱۹- گزینه ۲

استراتژی اول جدول ارزش گزاره $r \Rightarrow (p \vee q)$ را رسم می‌کنیم؛ بعد به دنبال سطرهایی می‌گردیم که در آن‌ها ارزش گزاره $r \Rightarrow (p \vee q)$ نادرست باشد، تعداد این سطرها برابر با تعداد کل حالت‌ها است. در آخر می‌بینیم در چند سطر از جدول، ارزش گزاره $r \Rightarrow (p \vee q)$ و q نادرست است تا تعداد حالت‌های مطلوبمان هم پیدا شود.

درس نامه ۱ جدول ارزش n گزاره، 2^n سطر (حالت) دارد، برای مثال جدول ارزش گزاره p, q و r $2^3 = 8$ سطر (حالت) دارد، ببینید:

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

۱۶- گزینه ۱

درس نامه ۱ اگر f و g دو تابع صعودی باشند، $f + g$ نیز صعودی می‌شود.

۲ برای این که بفهمیم تابع f در چه بازه‌هایی صعودی است، کافی است نامعادله $f'(x) \geq 0$ را حل کنیم:

گام ۱ در بازه $[0, +\infty)$ ، ضابطه f به صورت $f(x) = \sqrt[3]{x} + x$ می‌شود. x و $\sqrt[3]{x}$ هر دو توابعی صعودی‌اند، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، جمع این دو تابع یعنی f نیز در $[0, +\infty)$ صعودی است.

گام ۲ در بازه $(-\infty, 0)$ ، ضابطه f به صورت $f(x) = \sqrt[3]{x} - x$ می‌شود که برای این که بفهمیم f در کدام بازه صعودی است، طبق مورد (۲) درس‌نامه، باید نامعادله $f'(x) \geq 0$ را حل کنیم:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} - x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 = \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} \geq 0$$

دقت کنید که مخرج کسر همواره مثبت است، پس کافی است نامعادله $1 - \sqrt[3]{x^2} \geq 0$ را حل کنیم:

$$1 - \sqrt[3]{x^2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} \leq 1 \xrightarrow{\text{توان } 3} x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

از طرفی فرض کردیم $x \in (-\infty, 0)$ است، بنابراین f در بازه $(-1, 0)$ نیز صعودی می‌شود.

گام ۳ f هم در بازه $[0, +\infty)$ و هم در بازه $(-1, 0)$ صعودی است، حالا با توجه به این که f در $x = 0$ پیوسته است، پس تابع در اجتماع این دو بازه، یعنی $(-1, +\infty)$ نیز صعودی می‌شود.

۱۷- گزینه ۳

درس نامه برای این که بفهمیم تابع f در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی است، کافی است نامعادله $f' < 0$ را حل کنیم.

گام ۱ ابتدا ضابطه f' را به دست می‌آوریم و آن را تجزیه و ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x^3(x^2-2) - (x^4-3)x \times 2x}{(x^2-2)^2} = \frac{4x^5 - 8x^3 - 2x^5 + 6x}{(x^2-2)^2} \\ &= \frac{2x^5 - 8x^3 + 6x}{(x^2-2)^2} = \frac{2x(x^4 - 4x^2 + 3)}{(x^2-2)^2} \end{aligned}$$

حالا عبارت $x^4 - 4x^2 + 3$ را با تغییر متغیر $x^2 = t$ تجزیه می‌کنیم:

$$x^4 - 4x^2 + 3 = t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3) \xrightarrow{t=x^2} (x^2-1)(x^2-3)$$

البته بدون استفاده از تغییر متغیر و با استفاده از اتحاد جمله‌مشتترک هم می‌توانستیم عبارت را تجزیه کنیم:

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^2 + 3 &= x^4 - x^2 - 3x^2 + 3 = x^2(x^2-1) - 3(x^2-1) \\ &= (x^2-1)(x^2-3) \end{aligned}$$

بنابراین ضابطه f' به شکل مقابل است:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1)(x^2-3)}{(x^2-2)^2}$$

گام ۲ حالا نامعادله $f'(x) < 0$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{2x(x^2-1)(x^2-3)}{(x^2-2)^2} < 0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 & (\text{ریشه فرد}) \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 & (\text{ریشه فرد}) \\ x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} & (\text{ریشه فرد}) \\ (x^2 - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} & (\text{ریشه زوج}) \end{cases}$$

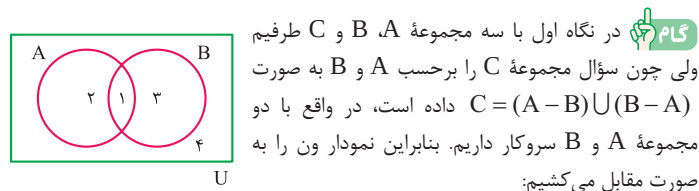
جدول تعیین علامت را می‌کشیم:

-2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	+2
	-		+		-		+	

طبق جدول بالا، f در بازه‌های $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ و $(1, \sqrt{2})$ ، $(-\sqrt{2}, -1)$ ، $(-2, -\sqrt{3})$ نزولی اکید است.



- ۳) چند قانون ابتدایی از جبر مجموعه‌ها ببینید:
- ۱) $(A')' = A$
- ۲) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- ۳) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- ۴) $A \cap B = A - B'$



اول مجموعه C و بعد C' را برحسب شماره‌ها می‌نویسیم:

$$C = (A - B) \cup (B - A) = (\{1, 2\} - \{1, 3\}) \cup (\{1, 3\} - \{1, 2\})$$

$$= \{2, 3\} \Rightarrow C' = \{1, 4\}$$

حالا که مجموعه C' را برحسب شماره‌ها داریم، می‌توانیم کل عبارت صورت سؤال را هم برحسب شماره‌ها بنویسیم:

$$(A' \cap B')' \cap C' = (\{2, 3\} \cap \{2, 4\})' \cap \{1, 4\}$$

$$= \{1, 2, 3\} \cap \{1, 4\} = \{1\}$$

همان‌طور که در نمودار ون می‌بینید؛ $\{1\}$ همان $A \cap B$ است. در این گام می‌توانستیم اول عبارت $(A' \cap B')' \cap C'$ را به کمک مورد (۳) درس‌نامه ساده کنیم، بعد برحسب شماره‌ها بنویسیمش:

$$(A' \cap B')' \cap C' = ((A' \cup B'))' \cap C' = (A \cup B) \cap C'$$

حالا برحسب شماره‌ها می‌نویسیم. ...

مشاوره جبر مجموعه‌ها جزء سؤالات پرتکرار در کنکور سراسری است که با روش شماره‌گذاری ناحیه‌ها به راحتی حل می‌شوند، به همین دلیل پیشنهاد می‌کنیم حتماً تمرکز کافی روی این مبحث بگذارید.

۲۱- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ میانه: برای پیدا کردن میانه، اول داده‌ها را از کوچک به بزرگ می‌نویسیم؛ اگر تعداد فردی داده داشته باشیم، میانه برابر داده وسط و اگر تعداد زوجی داده داشته باشیم، میانه برابر میانگین دو داده وسط می‌شود.

۲) اگر مطابق جدول زیر، فراوانی داده‌های X_1 تا X_n به ترتیب برابر f_1 تا f_n باشد، میانگین این داده‌ها (میانگین) را با $\bar{x}$ نمایش می‌دهیم. برابر است با:

داده‌ها	X_1	X_2	...	X_n
فراوانی	f_1	f_2	...	f_n

$$\bar{x} = \frac{X_1 f_1 + X_2 f_2 + \dots + X_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

۳) اگر مطابق جدول زیر داده‌های X_1 تا X_n به ترتیب دارای فراوانی f_1 تا f_n باشند، واریانس از فرمول‌های زیر محاسبه می‌شود:

داده‌ها	X_1	X_2	...	X_n
فراوانی	f_1	f_2	...	f_n

$$\sigma^2 = \frac{f_1(X_1 - \bar{x})^2 + f_2(X_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_n(X_n - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

$$\sigma^2 = \frac{f_1 X_1^2 + f_2 X_2^2 + \dots + f_n X_n^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} - \bar{x}^2$$

۴) اگر همه داده‌ها با عددی ثابت جمع و یا عددی ثابت از همه کم شود، واریانس تغییر نمی‌کند، بنابراین اگر داده‌ها خیلی بزرگ بودند، می‌توانیم همه داده‌ها را منهای یک عدد ثابت کنیم و سپس واریانس را محاسبه کنیم.

دقت کنید برای این که سؤال قابل حل باشد، باید در صورت سؤال گفته می‌شد که $13 \leq a$ است و اگر نه بدون این شرط نمی‌توانیم سؤال را حل کنیم.

۲) جدول ارزش گزاره‌های $p \vee q$ (همون p یا q) و $p \Rightarrow q$ (همون p آنگاه q) به صورت زیر هستند:

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$
د	د	د	د
د	ن	د	ن
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

گام ۱ ابتدا به کمک درس‌نامه، جدول ارزش گزاره $(p \vee q) \Rightarrow r$ را رسم می‌کنیم:

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن
د	ن	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن
ن	ن	د	ن	د
ن	ن	ن	ن	د

گام ۲ با توجه به جدول بالا، ارزش گزاره $(p \vee q) \Rightarrow r$ در سه حالت نادرست است (این سطرها را رنگی کرده‌ایم)؛ پس تعداد کل حالت‌ها ۳ تا است.

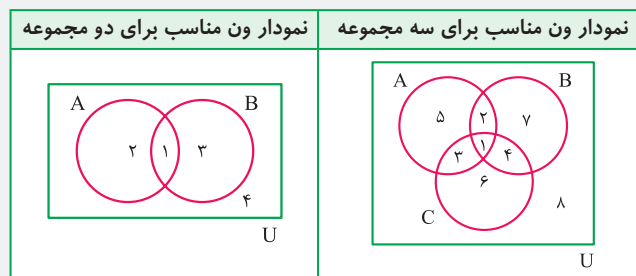
گام ۳ برای پیدا کردن حالت‌های مطلوب باید ببینیم در چند سطر، هم ارزش گزاره $(p \vee q) \Rightarrow r$ و هم ارزش گزاره q نادرست است. همان‌طور که در جدول می‌بینید، فقط در یک سطر (سطری که با $*$ مشخص شده) این اتفاق می‌افتد، پس تعداد حالت‌های مطلوب یکی است و جواب $\frac{1}{3}$ می‌شود.

مشاوره از کنکور سال ۱۴۰۰، ردپای احتمال در بقیه فصل‌های گسسته از جمله نظریه اعداد، منطق گزاره‌ها و ... دیده می‌شود. به همین خاطر پیشنهاد می‌کنیم فصل احتمال را خوب بخوانید.

۲۰- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ بعضی وقت‌ها یک عبارت مجموعه‌ای (نسبتاً طولانی) به ما می‌دهند و می‌گویند، این عبارت با کدام مجموعه برابر است؟ (یا کدام گزینه درست است؟) برای حل کردن این سؤالات کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

الف) می‌بینیم عبارت صورت سؤال چند مجموعه دارد (معمولاً یا ۲ تا است یا ۳ تا). در ادامه مطابق جدول زیر نمودار ون مناسب را می‌کشیم و قسمت‌های مختلفش را شماره‌گذاری می‌کنیم:



ب) حالا عبارت صورت سؤال را برحسب شماره‌ها بازنویسی می‌کنیم، مثلاً در حالتی که سه مجموعه داشته باشیم، مطابق جدول بالا به جای A ، مجموعه $\{1, 2, 3, 5\}$ و در حالتی که دو مجموعه داشته باشیم به جای A ، $\{1, 2\}$ را می‌نویسیم.

۲) حواستان باشد اگر سؤال برای مجموعه‌ها شرط بگذارد، باید نمودار ون را طوری رسم کنیم که آن شرط رعایت شود. برای مثال اگر در سؤالی دو مجموعه داشته باشیم و سؤال گفته باشد $A \subseteq B$ است، باید نمودار ون را به صورت مقابل در نظر بگیریم. همان‌طور که می‌بینید؛ چون $A \subseteq B$ بود، کل A را داخل B کشیدیم.

گام ۶ اول داده‌ها را از کوچک به بزرگ می‌نویسیم:

人



گام ۱ با توجه به مورد (۱) درس‌نامه، در ۶ حالت جمع دو تاس برابر ۷ و در ۳ حالت برابر ۱۰ است، پس احتمال این‌که جمع عدد دو تاس ۷ یا ۱۰ باشد، $\frac{۳}{۳۶} = \frac{۱}{۱۲}$ و احتمال این‌که جمع عدد دو تاس ۷ و ۱۰ نشود $\frac{۳}{۴} = ۱ - \frac{۱}{۴}$ است.

گام ۲ اگر یک مهره از ظرف اول انتخاب کنیم با احتمال $\frac{۳}{۹}$ آبی و با احتمال $\frac{۶}{۹}$ قرمز است، پس احتمال این‌که یک مهره آبی از ظرف اول به ظرف دوم برود $\frac{۳}{۹}$ و احتمال این‌که یک مهره قرمز از ظرف اول به ظرف دوم برود $\frac{۶}{۹}$ است. به طور مشابه احتمال این‌که یک مهره آبی از ظرف دوم به ظرف اول برود $\frac{۴}{۹}$ و احتمال این‌که یک مهره قرمز از ظرف دوم به ظرف اول برود $\frac{۵}{۹}$ است.

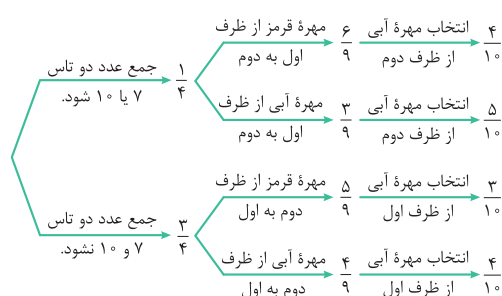
گام ۳ اگر مهره آبی از ظرف اول به ظرف دوم برود، ظرف دوم تعداد مهره بیشتری دارد و شامل ۵ مهره آبی و ۵ مهره قرمز می‌شود که در این صورت احتمال انتخاب مهره آبی $\frac{۵}{۱۰}$ است. به طور مشابه:

♦ از ظرف اول به دوم مهره قرمز برود: ظرف دوم شامل ۴ مهره آبی و ۶ مهره قرمز می‌شود، پس احتمال انتخاب مهره آبی $\frac{۴}{۱۰}$ است.

♦ از ظرف دوم به اول مهره آبی برود: ظرف اول شامل ۴ مهره آبی و ۶ مهره قرمز می‌شود، احتمال انتخاب مهره آبی $\frac{۴}{۱۰}$ است.

♦ از ظرف دوم به اول مهره قرمز برود: ظرف اول شامل ۳ مهره آبی و ۷ مهره قرمز می‌شود، پس احتمال انتخاب مهره آبی $\frac{۳}{۱۰}$ است.

گام ۴ حالا نمودار درختی را رسم می‌کنیم:



بنابراین احتمال مورد نظر برابر می‌شود با:

$$P = \frac{1}{4} \left(\frac{6}{9} \times \frac{5}{10} + \frac{3}{9} \times \frac{4}{10} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{5}{9} \times \frac{3}{10} + \frac{4}{9} \times \frac{6}{10} \right) = \frac{۱۳۲}{۳۶۰} = \frac{۱۱}{۳۰}$$



۲۷- گزینه ۴

استراتژی دو معادله داده‌شده متغیر مشترک ندارند، پس تعداد جواب‌های طبیعی هر معادله را به دست می‌آوریم و در هم ضرب می‌کنیم تا جواب سؤال به دست آید.

درس‌نامه ۱ تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر

$$\binom{n-1}{k-1} \text{ است.}$$

۲ برای به دست آوردن تعداد جواب‌های دستگاه معادلات، کارهای زیر را انجام می‌دهیم:
الف) اول متغیرهای مشترک بین دو معادله را از بین می‌بریم تا به یک دستگاه جدید برسیم.
ب) در دستگاه جدید تعداد جواب‌های هر کدام از معادله‌ها را با توجه به شرایط متغیرها به دست آورده و در هم ضرب می‌کنیم.

دو معادله داده‌شده، متغیر مشترک ندارند، پس تعداد جواب‌های طبیعی هر معادله را به کمک مورد (۱) درس‌نامه به دست می‌آوریم و در هم ضرب می‌کنیم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9 \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ n=9 \end{cases} \Rightarrow \binom{n-1}{k-1} = \binom{8}{2} = ۲۸$$

$$x_4 + x_5 = 7 \Rightarrow \begin{cases} k=2 \\ n=7 \end{cases} \Rightarrow \binom{n-1}{k-1} = \binom{6}{1} = ۶$$

بنابراین جواب برابر $۲۸ \times ۶ = ۱۶۸$ می‌شود.

گام ۱ مجموع خارج قسمت و باقی‌مانده ۱۷ است، پس به جای q در تساوی $a = ۱۳q + r$ می‌نویسیم $۱۷ - r$:

$$a = ۱۳q + r \xrightarrow{q=17-r} a = ۱۳(۱۷-r) + r$$

$$\Rightarrow a = -۱۳r + ۲۲۱ + r \Rightarrow a = -۱۲r + ۲۲۱$$

$$a - ۸ = -۱۲r + ۲۱۳$$

بنابراین $a - ۸$ می‌شود:

گام ۲ می‌خواهیم باقی‌مانده تقسیم $a - ۸$ بر ۳۶ برابر ۲۱ باشد، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه باید بنویسیم:

$$a - ۸ \equiv ۲۱ \pmod{۳۶} \Rightarrow -۱۲r + ۲۱۳ \equiv ۲۱ \pmod{۳۶} \Rightarrow -۱۲r \equiv -۱۹۲ \pmod{۳۶}$$

$$\xrightarrow{\div ۱۲} r \equiv ۱ \pmod{(۱۲, ۳۶)=۱۲}$$

باقی‌مانده تقسیم r بر ۳ برابر ۱ است. $\Rightarrow r \equiv ۱ \pmod{۳} \Rightarrow r = ۳k + ۱$

گام ۳ در بین ۱۳ مقدار صحیح برای r ، ۴ مقدار وجود دارد که در تقسیم به ۳ باقی‌مانده ۱ داشته باشند $(۱, ۴, ۷, ۱۰)$ ، پس جواب برابر $\frac{۴}{۱۳}$ است.



۲۵- گزینه ۴

استراتژی اول باید ببینیم کوچک‌ترین عدد فاکتوربلی مضرب ۳۰ کدام است تا مقدار m به دست آید، بعد به دنبال توان کوچکی از m باشیم که باقی‌مانده تقسیم آن بر ۳۱ برابر ± ۱ شود.

درس‌نامه ۱ طرفین یک همبستگی را می‌توانیم در یک عدد صحیح ضرب کنیم یا به توان یک عدد طبیعی برسانیم:

$$a \equiv b \Rightarrow \begin{cases} ac \equiv bc \\ a^n \equiv b^n \end{cases}$$

۲ برای به دست آوردن باقی‌مانده تقسیم عدد a^n بر m ، ابتدا باید به دنبال توان کوچکی از a باشیم که به پیمانه m با $+۱$ یا -۱ همبستگی باشد، در ادامه با ضرب و توان‌رسانی مناسب، باقی‌مانده تقسیم a^n بر m را پیدا می‌کنیم.

برای مثال برای به دست آوردن باقی‌مانده تقسیم $۳^{۱۰۰}$ بر ۲۶، ابتدا به دنبال توان کوچکی از ۳ می‌گردیم که باقی‌مانده تقسیم آن بر ۲۶ برابر $+۱$ یا -۱ شود:

$$۳^۳ \equiv ۱ \pmod{۲۶} \quad \text{حالا با ضرب و توان‌رسانی مناسب، در همبستگی بالا را به } ۳^{۱۰۰} \text{ تبدیل می‌کنیم:}$$

$$۳^{۱۰۰} \equiv ۳ \pmod{۲۶} \xrightarrow{\times ۳} ۳^{۹۶} \equiv ۱ \pmod{۲۶} \xrightarrow{\times ۳} ۳^{۹۹} \equiv ۳ \pmod{۲۶}$$

گام ۱ به دنبال کوچک‌ترین عدد فاکتوربلی مضرب $۳۰ = ۲ \times ۳ \times ۵$ هستیم، یعنی می‌خواهیم عدد فاکتوربلی ما حداقل یک عامل ۲، ۳ و ۵ داشته باشد که این عدد $۵!$ است و $m = ۵$ می‌شود.

گام ۲ حالا باقی‌مانده $۵^{۳۳۲} = m^{۳۳۲}$ بر ۳۱ را می‌خواهیم، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه به دنبال توانی از ۵ می‌گردیم که باقی‌مانده آن بر ۳۱ برابر ± ۱ شود:

$$۵^۳ \equiv ۱ \pmod{۳۱} \quad \text{حالا با ضرب و توان‌رسانی مناسب طرفین همبستگی } ۵^۳ \equiv ۱ \pmod{۳۱} \text{ باقی‌مانده تقسیم } ۵^{۳۳۲} \text{ بر } ۳۱ \text{ را به دست می‌آوریم:}$$

$$۵^{۳۳۲} \equiv ۲۵ \pmod{۳۱} \xrightarrow{\times ۵} ۵^{۳۳۰} \equiv ۱ \pmod{۳۱} \xrightarrow{\text{توان } ۱۱} ۵^۳ \equiv ۱ \pmod{۳۱}$$



۲۶- گزینه ۲

استراتژی با احتمال کل طرفین، پس اول احتمال این‌که مجموع عدد دو تاس ۷ یا ۱۰ شود را به دست می‌آوریم، بعد به کمک نمودار درختی احتمال مورد نظر را حساب می‌کنیم.

درس‌نامه ۱ اگر دو تاس پرتاب کنیم، تعداد حالتی که جمع دو تاس برابر k باشد $(۲ \leq k \leq ۱۲, k \in \mathbb{N})$ از جدول زیر به دست می‌آید:

جمع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالات	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

از طرفی تعداد کل حالات در پرتاب دو تاس ۳۶ است، پس برای مثال احتمال این‌که جمع دو تاس مضرب ۴ باشد برابر $\frac{۳+۵+۱}{۳۶}$ می‌شود. (در حالت جمع دو تاس برابر ۴، در ۵ حالت جمع دو تاس برابر ۸ و در ۱ حالت جمع دو تاس برابر ۱۲ است.) **۲ قانون احتمال کل:** گاهی اوقات برای این‌که احتمال رخ دادن یک پیشامد را به دست آوریم، باید فضای نمونه‌ای را به چند حالت افراز کنیم، احتمال هر کدام را حساب کنیم و سپس احتمال‌های به دست آمده را با هم جمع کنیم تا جواب به دست آید، که برای این کار از نمودار درختی استفاده می‌کنیم.



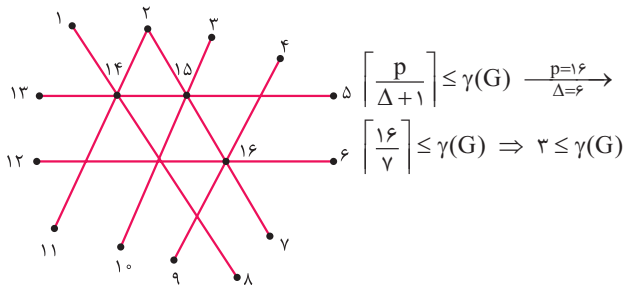
۲۸- گزینه ۱



۲ در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، به مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری‌ای که کم‌ترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه‌گر مینیمم می‌گوییم؛ تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم. برای مثال در گراف مورد (۱) درس‌نامه، $\gamma(G) = 2$ است.

۳ در هر گراف ساده از مرتبه p ، کران پایین عدد احاطه‌گری از رابطه زیر به دست می‌آید: در این رابطه Δ همان بزرگ‌ترین درجه گراف است.

گام اول کران پایین عدد احاطه‌گری را به کمک مورد (۳) درس‌نامه به دست می‌آوریم:



گام ۳ یعنی نمی‌توانیم مجموعه احاطه‌گری با کم‌تر از ۳ عضو داشته باشیم، حالا اگر مجموعه $\{14, 15, 16\}$ را در نظر بگیرید، می‌بینیم که می‌توانیم با ۳ رأس، گراف را احاطه کنیم، پس همان کران پایین $\gamma(G)$ ، یعنی ۳، عدد احاطه‌گری است.

مشاوره مفهوم احاطه‌گری، مجموعه احاطه‌گر مینیمم و مینیمال و ... جزء مباحثی هستند که تقریباً هر سال در کنکور سراسری یک تست را به خود اختصاص می‌دهند که معمولاً با تسلط بر مفاهیم آن‌ها، به راحتی می‌توانید به این سؤالات پاسخ دهید.

۳۰- گزینه ۲



۱ درس‌نامه دو بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ به شرطی موازی‌اند که این تناسب برقرار باشد:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

۲ اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی باشند، در این صورت هر ضربی از آن‌ها مثل $m\vec{a}$ و $n\vec{b}$ هم موازی خواهند بود.

۳ ضرب خارجی دو بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

هواست به این متغییه باشه.

۴ ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، یعنی $\vec{a} \cdot \vec{b}$ همیشه یک عدد حقیقی است.

۵ هر بردار مثل $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ را می‌توانیم برحسب بردارهای یک‌ه $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ، $\vec{j} = (0, 1, 0)$ و $\vec{k} = (0, 0, 1)$ به صورت $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ بنویسیم.

گام ۱ (کم کردن هوشمندانه محاسبات) طبق مورد (۴) درس‌نامه می‌دانیم $\vec{a} \cdot \vec{b}$ همیشه یک عدد حقیقی است، پس می‌توانیم بگوییم $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b})$ ضربی از بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ است.

به گفته سؤال بردارهای $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b})$ و $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ موازی‌اند، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه مضاربشان، یعنی بردارهای $\vec{a} \times \vec{b}$ و $\vec{c}$ هم موازی‌اند، این‌طوری دیگر نیازی به محاسبه $\vec{a} \cdot \vec{b}$ نیست.

گام ۲ (محاسبه α) حالا $\vec{a} \times \vec{b}$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (-1, \alpha, 2) \\ \vec{b} &= (-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 2) \\ \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} \alpha \cdot 2 - 2 \cdot \frac{2}{3} \\ 2 \cdot (-\frac{4}{3}) - (-1) \cdot 2 \\ (-1) \cdot \frac{2}{3} - \alpha \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha - \frac{4}{3} \\ -\frac{8}{3} + 2 \\ -\frac{2}{3} - 2\alpha \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} &= (2\alpha - \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3} - 2\alpha) \end{aligned}$$

درس‌نامه اگر اعداد طبیعی ۱ تا n را در یک جدول $n \times n$ طوری بچینیم که در هیچ سطر و هیچ ستونی از آن عدد تکراری پیدا نشود؛ یک مربع لاتین $n \times n$ ساخته‌ایم. برای درک بهتر یک مربع لاتین 3×3 و 4×4 ببینید:

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۱	۲
۳	۴	۲	۱

گام ۱ با توجه به این‌که در هیچ سطر و ستونی از مربع لاتین عدد تکراری نداریم، پس خانه‌های قرمز رنگ مربع، مطابق شکل با اعداد ۲ و ۴ به راحتی پر می‌شوند.

		۳		
b	۳	۱	۴	
۴	۲	۵	۱	۳
۳	۱	۴	۲	۵
		۲		a

گام ۲ حالا خوب به خانه‌های سبز رنگ در شکل بالا نگاه کنید. این دو خانه را باید با اعداد ۳ و ۵ پر کنیم. خانه سمت راست با عدد ۳ هم ستون است پس چاره‌ای ندارد جز این‌که ۵ باشد. بنابراین خانه سمت چپ هم با عدد ۳ پر می‌شود.

گام ۳ در ادامه به خانه آبی رنگ شکل زیر نگاه کنید. این خانه با اعداد ۱، ۳، ۴ و ۵ هم‌سطر و ستون است، پس چاره‌ای ندارد جز این‌که ۲ باشد. تا اینجا مربع لاتین به این صورت شد (فعلاً $b = 5$ رو نپنید):

*		۳		
b = 5	۳	۱	۴	۲
۴	۲	۵	۱	۳
۳	۱	۴	۲	۵
*		۲		a

گام ۴ حالا مقدار b به راحتی معلوم می‌شود؛ چون در سطر دوم فقط عدد ۵ باقی‌مانده است، پس $b = 5$. در ستون اول، خانه‌های ستاره‌دار با اعداد ۱ و ۲ پر می‌شوند. * پایین با عدد ۲ هم‌سطر است، پس باید ۱ باشد.

گام ۵ حالا نوبت a است. a با اعداد ۱، ۲، ۳ و ۵ هم‌سطر و ستون است، پس باید برابر ۴ باشد. بنابراین زوج مرتب (a, b) برابر $(4, 5)$ است.

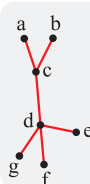
۲۹- گزینه ۲



یژه استراتژی اول به کمک نامساوی $\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{p}{\Delta+1} \right\rfloor$ ، کران پایین $\gamma(G)$ را به دست می‌آوریم؛ بعد سعی می‌کنیم مثالی بنویسیم که با همان کران پایین گراف احاطه شود. اگر چنین مثالی وجود داشت، جواب معلوم می‌شود؛ ولی اگر وجود نداشت کران پایین $\gamma(G)$ را یکی یکی زیاد می‌کنیم تا بالاخره مثال هم پیدا شود.

درس‌نامه ۱ به زیرمجموعه ناتهی D از رئوس گراف G مجموعه

احاطه‌گری می‌گوییم هر وقت هر رأس از G یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد. برای مثال مجموعه‌های زیر برای گراف مقابل، احاطه‌گر هستند:



$$\{c, d\}, \{c, e, f, g\}, \{a, b, c, d\}, \dots$$



در مثلث قائم الزاویه AMP زاویه های 3° و 6° می بینیم، پس طبق مورد (۱) درس نامه داریم:

$$\tan 3^\circ = \frac{x}{m} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{m} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}m$$

$$\cos 3^\circ = \frac{m}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{m}{y} \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{3}}m = \frac{2\sqrt{3}}{3}m$$

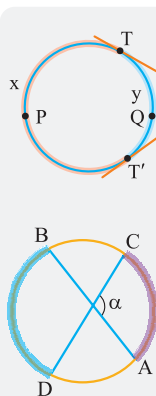
$$\Rightarrow a = x + y = \frac{\sqrt{3}}{3}m + \frac{2\sqrt{3}}{3}m = \sqrt{3}m$$

گام ۳ (محاسبه خواسته سوال)

در گام قبل دیدیم که $a = \sqrt{3}m$ ، پس $\frac{a}{m} = \sqrt{3}$ ، بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MNP}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}m^2} = \left(\frac{a}{m}\right)^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$$

۳۳- گزینه ۳



درس نامه ۱ مطابق شکل مقابل اگر زاویه بین مماس هایی که از نقطه ای خارج یک دایره بر آن رسم می شوند، α باشد، اندازه کمان بزرگتر $(TPT' = x)$ و کوچکتر $(TQT' = y)$ ایجاد شده روی دایره به ترتیب برابر $x = 180^\circ + \alpha$ و $y = 180^\circ - \alpha$ خواهد بود.

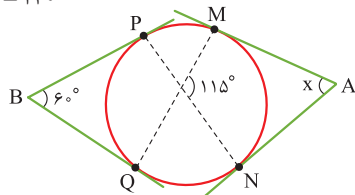
۲ به زاویه ای که از برخورد دو وتر در داخل دایره ساخته می شود، زاویه بین دو وتر می گوئیم. مثلاً زاویه α در شکل مقابل این چنین است. اندازه این زاویه از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\alpha = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$$

گام ۳ (محاسبه اندازه کمان PQ)

همان طور که می بینید $\widehat{B} = 6^\circ$ زاویه بین دو مماس است، پس با توجه به قسمت (۱) درس نامه داریم:

$$\widehat{PQ} = 180^\circ - 6^\circ = 174^\circ$$



گام ۴ (محاسبه خواسته سوال) زاویه بین دو وتر PN و MQ که داخل دایره متقاطع اند، برابر با 115° است، پس با توجه به قسمت (۲) درس نامه، داریم:

$$115^\circ = \frac{\widehat{MN} + \widehat{PQ}}{2} \Rightarrow 115^\circ = \frac{\widehat{MN} + 174^\circ}{2} \Rightarrow \widehat{MN} = 11^\circ$$

در آخر باز هم به کمک قسمت (۱) درس نامه، برای کمان MN و زاویه A می توانیم بنویسیم:

$$\widehat{MN} = 180^\circ - x \Rightarrow x = 180^\circ - 11^\circ = 169^\circ$$

مشاوره این سوال، شبیه سازی یکی از تمرین های کتاب درسی است؛ پس کتاب درسی را جدی بگیرید.

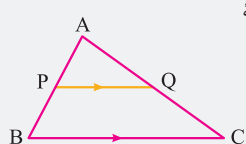
۳۴- گزینه ۴

درس نامه ۱ اگر p نصف محیط مثلثی با ضلع های a، b و c باشد، مساحتش برابر می شود با:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

۲ در شکل روبه رو اگر $PQ \parallel BC$ ، آن گاه طبق قضیه

تالس، تناسب $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ برقرار است.



در آخر شرط موازی بودن $\vec{a} \times \vec{b}$ را با بردار $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1, 1, -1)$ می نویسیم؛ تا α پیدا بشود:

$$\frac{2\alpha - \frac{4}{3}}{-1} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{\frac{4}{3}\alpha - \frac{2}{3}}{-1} \Rightarrow 2\alpha - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 1$$

این جا باید حواسمان باشد که چون در گزینه ها «هیچ مقدار α » هم داریم، $\alpha = 1$ را باید در معادله اولیه هم جای گذاری کنیم:

$$\frac{2(1) - \frac{4}{3}}{-1} = \frac{-\frac{2}{3}}{1} = \frac{\frac{4}{3}(1) - \frac{2}{3}}{-1}$$

همان طور که می بینید $\alpha = 1$ در معادله اولیه صدق می کند پس جواب است.

۳۱- گزینه ۱

درس نامه دو ماتریس زمانی مساوی هستند که:

(الف) هم مرتبه باشند.

(ب) درایه های نظیر به نظیرشان مساوی باشند.

گام ۳ (ساده کردن معادله) اول سمت چپ تساوی $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix}$ را ساده می کنیم تا به تساوی دو ماتریس هم مرتبه برسیم:

$$\begin{bmatrix} 5b_1 - 2b_2 \\ 4b_1 + ab_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix}$$

گام ۴ (محاسبه خواسته مسئله) حالا طبق درس نامه باید تک تک درایه ها را مساوی هم بگذاریم تا مقدار a را به دست بیاوریم:

$$5b_1 - 2b_2 = 4b_1 \Rightarrow b_1 = 2b_2$$

$$4b_1 + ab_2 = 4b_2 \xrightarrow{b_1=2b_2} 4(2b_2) + ab_2 = 4b_2$$

$$\xrightarrow{b_2 \neq 0} 8 + a = 4 \Rightarrow a = -4$$

۳۲- گزینه ۱

درس نامه ۱ برای محاسبه رابطه بین طول اضلاع

مثلث های قائم الزاویه ای که زاویه های حاده آنها 3° و 6° است، می توانید از نسبت های مثلثاتی استفاده کنید. مثلاً در شکل مقابل اگر $AC = 2x$ باشد، می توانید بنویسید:

$$\sin 3^\circ = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{\sin 3^\circ = \frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \frac{AB}{2x} \Rightarrow AB = x$$

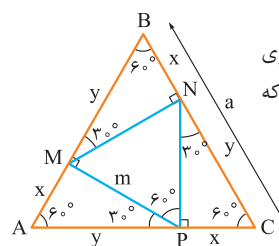
$$\cos 3^\circ = \frac{BC}{AC} \xrightarrow{\cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{2x} \Rightarrow BC = \sqrt{3}x$$

۲ مساحت مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع x، برابر است با:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

گام ۴ (تحلیل سوال و رسم شکل مناسب)

مطابق شکل، رأس های مثلث متساوی الاضلاع MNP بر روی اضلاع مثلث متساوی الاضلاع ABC قرار دارند به طوری که اضلاع مثلث MNP بر اضلاع مثلث ABC عمودند.



گام ۳ (محاسبه طول ضلع مثلث MNP بر حسب طول ضلع مثلث ABC)

طول اضلاع مثلث متساوی الاضلاع MNP را m و طول اضلاع مثلث متساوی الاضلاع ABC را a در نظر می گیریم. سه مثلث قائم الزاویه AMP، BNM و CNP بنا به حالت دو زاویه و ضلع بین همنهشت هستند؛ پس می توانیم بنویسیم:

$$AP = BM = CN = y \text{ و } AM = BN = CP = x$$



از آن جا که نقطه M بیرون مثلث ABC است، داریم: $\hat{MCB} > \hat{ACB} \Rightarrow \alpha > \hat{C}$
از طرفی واضح است که $\alpha = \frac{\hat{B}}{2}$ ، بنابراین: $\frac{\hat{B}}{2} > \hat{C} \Rightarrow \hat{B} > 2\hat{C}$

۳۶- گزینه ۴

درس نامه مطابق شکل، اگر از نقطه C واقع بر امتداد وتر AB ، مماس CT را بر دایره رسم کنیم، داریم:
 $CT^2 = CA \cdot CB$

مطابق شکل مقابل، فرض می کنیم $DB = BC = x$ باشد.
بر دایره مماس است، پس طبق درس نامه می توانیم بنویسیم:
 $AC^2 = CB \cdot CD \Rightarrow AC^2 = x(2x) \Rightarrow AC = x\sqrt{2}$
 $\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{x\sqrt{2}}{x} = \sqrt{2}$

تله حواستان باشد رابطه طولی را به صورت $CA^2 = CB \cdot BD$ ننویسید؛ با این کار در تله ۳ می افتید.

۳۷- گزینه ۲

درس نامه ۱ مطابق شکل روبه رو، اگر دو دایره به مرکزهای O و O' در نقطه T بر هم مماس باشند، T بر خط گذرنده از O و O' واقع است.

۲ در شکل مقابل $\hat{C}$ ، زاویه بین یک مماس و امتداد یک وتر است. اندازه چنین زاویه ای از رابطه زیر محاسبه می شود:
 $\alpha = \frac{\widehat{BT} - \widehat{AT}}{2}$

۳ اگر در دایره ای به شعاع R ، اندازه کمان BC برابر با 60° باشد، طول وتر BC برابر با R است و بالعکس. برای درک بهتر این موضوع، شکل مقابل را ببینید:
 $\widehat{BC} = 60^\circ \Leftrightarrow BC = R$

گام ۱ (افزودن پاره خط مناسب به شکل و تحلیل آن)

مطابق شکل، از مرکز دایره بزرگ (O) به نقطه تماس (A) وصل می کنیم. همان طور که در قسمت (۱) درس نامه گفتیم، مرکز دایره کوچک (O') بر OA واقع است، پس OA قطر دایره کوچک است. به گفته سوال شعاع دایره بزرگ برابر ۶ است، پس $OA = 6$ و در نتیجه شعاع دایره کوچک برابر $3 = \frac{OA}{2} = O'A$ می شود.

گام ۲ (محاسبه اندازه کمان $\widehat{OB}$)

با توجه به این که OA قطر دایره کوچک است، در دایره کوچک داریم $\widehat{AO} = 18^\circ$ ؛ از طرفی $\hat{C} = \frac{\widehat{AO} - \widehat{AB}}{2}$ پس:

$$3^\circ = \frac{18^\circ - \widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = 12^\circ \xrightarrow{\widehat{ABO} = 18^\circ} \widehat{BO} = 6^\circ$$

گام ۳ (محاسبه خواسته سوال)

در دایره کوچک، از تساوی $\widehat{BO} = 6^\circ$ نتیجه می گیریم که طول وتر BO برابر با شعاع دایره است (مورد (۳) درس نامه)، یعنی $BO = 3$. حالا داریم: $BD = OD - OB = 6 - 3 = 3$
شعاع دایره بزرگ

۳ به پاره خطی که وسط دو ضلع مثلث را به هم وصل می کند؛ میان خط مثلث می گوئیم. مثلاً در شکل مقابل MN میان خط است.

در مورد میان خط دو مورد زیر را بلد باشید:

الف) میان خط با ضلع سوم موازی است ($MN \parallel BC$).

ب) طول میان خط همیشه نصف طول ضلع سوم است؛ یعنی: $MN = \frac{1}{2} BC$.

۴ مساحت هر دوزنقه با قاعده های a و b و ارتفاع h (شکل مقابل را ببینید) برابر است با:

$$S(ABCD) = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$$

گام ۱ (ارتفاع داده شده، بر کدام ضلع مثلث وارد می شود؟)

با استفاده از رابطه هرون، مساحت مثلثی به طول اضلاع 17 ، 10 و 21 را محاسبه می کنیم:

$$2p = 21 + 17 + 10 \Rightarrow p = 24 \Rightarrow S = \sqrt{24 \times (24 - 21) \times (24 - 17) \times (24 - 10)} \\ \Rightarrow S = \sqrt{24 \times 3 \times 7 \times 14} = \sqrt{3^2 \times 2^2 \times 7^2} = 3 \times 2 \times 7 = 42$$

بباید فرض کنیم ارتفاع $AH = 8$ بر ضلع به طول x وارد شده باشد؛ این جوری می توانیم بنویسیم:

$$S = \frac{1}{2} AH \cdot x \Rightarrow 42 = \frac{1}{2} \times 8 \times x \Rightarrow 42 = 4x \Rightarrow x = 21$$

بنابراین AH ارتفاع وارد بر بزرگ ترین ضلع است.

گام ۲ (رسم شکل مناسب و تشخیص نوع چهارضلعی)
شکل مسئله به صورت مقابل است. P و N وسط دو ضلع مثلث اند، پس طبق مورد (۳) درس نامه PN میان خط مثلث ABC و در نتیجه موازی با BC است. بنابراین $HMPN$ یک دوزنقه است.

گام ۳ (محاسبه مساحت چهارضلعی $HMPN$)

در گام دوم دیدیم که PN میان خط مثلث ABC است، پس طبق قسمت (۳) درس نامه طول آن نصف ضلع سوم (BC) است:

$$PN = \frac{1}{2} BC = \frac{21}{2} = 10.5$$

از طرفی AHC یک مثلث قائم الزاویه با وتر $AC = 2 \times 5 = 10$ و یک ضلع قائمه $AH = 2 \times 4 = 8$ است، پس بنا به قضیه فیثاغورس $CH = 2 \times 3 = 6$ و داریم:

$$MH = MC - CH = \frac{21}{2} - 6 = 4.5$$

حالا به کمک قضیه تالس در مثلث AHC ، طول ارتفاع دوزنقه $MPNH$ را حساب می کنیم:

$$\frac{AL}{LH} = \frac{AN}{NC} \xrightarrow{AN=NC} AL = LH = \frac{1}{2} AH = 4$$

$$S(HMPN) = \frac{1}{2}(PN + MH) \times LH = \frac{1}{2}(10.5 + 4.5) \times 4 = 30$$

پس:

مشاوره سؤالات بدون شکل هندسه، در کنکورهای جدید جایگاه ویژه ای پیدا کرده اند؛ به همین خاطر پیشنهاد می کنیم رسم شکلتان را با حل سؤالات این چنینی تقویت کنید.

۳۵- گزینه ۳

استراتژی چون M روی عمود منصف پاره خط BC است، پس در اولین قدم، M را به B و C وصل می کنیم. در ادامه به کمک یک نامساوی در مثلث MBC مسئله را حل می کنیم.

درس نامه اگر نقطه ای روی عمود منصف یک پاره خط واقع باشد، از هر دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و بالعکس. مثلاً برای نقطه M در شکل مقابل می توانیم بنویسیم:
 $MB = MC \Leftrightarrow \delta$ عمود منصف BC است

مطابق شکل مقابل، از M به B و C وصل می کنیم. با توجه به

این که M روی عمود منصف BC قرار دارد، می توانیم بگوییم

فاصله اش از B و C یکسان است؛ یعنی $MB = MC$.

پس مثلث MBC متساوی الساقین و در نتیجه

$\hat{MCB} = \hat{MBC} = \alpha$ است.



در ادامه $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}$ را به دست می‌آوریم:

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (-5, -3, -4)$$

حالا به کمک موردهای (۲) و (۳) درس‌نامه مساحت مثلث را حساب می‌کنیم:

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{50} = \frac{5}{2} \sqrt{2}$$

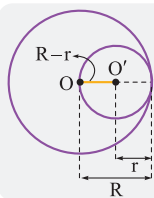
گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال) حالا که مساحت مثلث ABC را داریم، می‌توانیم به کمک

$$\text{رابطه } S = \frac{1}{2} AH \times |BC| \text{، طول ارتفاع } AH \text{ را به دست بیاوریم:}$$

$$S = \frac{1}{2} AH \times |BC| \Rightarrow \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} AH \times \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} AH \times \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

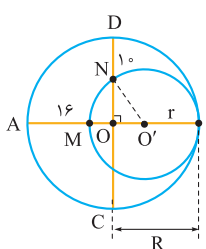
۴۰ - گزینه ۳



درس‌نامه ۱ همه قطره‌های یک دایره، از مرکز آن

می‌گذرند، پس محل تقاطع هر دو قطر دلخواه، مرکز دایره است.

۲ همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید؛ فاصله بین مرکزهای دو دایره مماس داخل، برابر با اختلاف طول شعاع‌های آن‌هاست و بالعکس.



گام ۱ (به دست آوردن رابطه بین شعاع‌های دو دایره)

همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، AB و CD قطرهای

دایره بزرگ هستند، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، محل

برخورد آن‌ها مرکز دایره بزرگ است. اگر دایره کوچک را

$C(O', r)$ و دایره بزرگ را $C(O, R)$ بنامیم، داریم:

$$AB = 2R \Rightarrow AM + MB = 2R \Rightarrow 16 + 2r = 2R$$

$$\Rightarrow R - r = 8 \quad (*)$$

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال)

از O' به N وصل می‌کنیم، حالا با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث ONO' داریم:

$$O'N^2 = O'O^2 + ON^2 \Rightarrow r^2 = (R - r)^2 + (R - 16)^2$$

$$\xrightarrow{(*)} r^2 = 8^2 + (r - 2)^2 \Rightarrow r^2 = 64 + r^2 - 4r + 4 \Rightarrow 4r = 68 \Rightarrow r = 17$$

مشاوره در کنکور ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۰، این دومین سؤال هندسه پایه است که با ایده‌گرفتن از تمرین‌های کتاب درسی طرح شده است و این اهمیت تسلط بر کتاب درسی را گوشزد می‌کند.

فیزیک

۴۱ - گزینه ۲

شفاف‌سازی یکای فرعی فشار: یکای فشار برحسب یکاهای اصلی

درس‌نامه ۱ برای برخی کمیت‌های فرعی که یکاهای پرکاربرد دارند، مانند نیرو، انرژی و ... دو نوع یکا داریم: $\diamond$ یکای SI: نام یک دانشمند است؛ مانند نیوتون (N) و ژول (J).

$$\diamond \text{ یکای فرعی: برحسب یکاهای اصلی است؛ مانند } \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} \text{ و } \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

برای به دست آوردن یکای فرعی فشار از روابط $P = \frac{F}{A}$ و $F = ma$ کمک می‌گیریم:

$$P \text{ یکای} = \frac{F \text{ یکای}}{A \text{ یکای}} = \frac{(m \text{ یکای}) \times (a \text{ یکای})}{(A \text{ یکای})} = \frac{\text{kg} \times \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\text{m}^2} \Rightarrow P \text{ یکای} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}$$

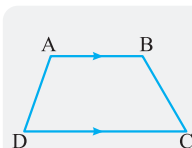
تذکره با توجه به آن‌چه در کتاب درسی آمده و در کنکور مطرح شده است (که ما از نظر

علمی با اون موافق نیستیم)، Pa یکای SI فشار و $\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}$ یکای فرعی فشار است (در صورتی که

هر دو یکای فرعی اند)، چون در این تست یکای فرعی فشار خواسته شده (با مبنای قراردادن کتاب درسی و کنکور)، $\diamond$ نادرست است.

۳۸ - گزینه ۳

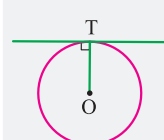
استراتژی با معلوم بودن شعاع دایره، طول دو ضلع OM و ON از مثلث OMN معلوم است، حالا کافی است زاویه بین این دو ضلع را داشته باشیم تا بتوانیم مساحت آن را حساب کنیم.



درس‌نامه ۱ در دوزنقه، قاعده‌ها با هم موازی‌اند،

پس طبق قضیه «موازی - مورب»، زاویه‌هایی که مجاور ساقه‌های دوزنقه‌اند، با هم مکمل‌اند، یعنی:

$$AB \parallel CD \Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$



۲ مطابق شکل مقابل، اگر خطی در نقطه T بر دایره‌ای به مرکز O

مماس باشد، زاویه‌ای که با وصل کردن O به T ایجاد می‌شود، قائمه است، گفتن ندارد که طول OT همان شعاع دایره است.

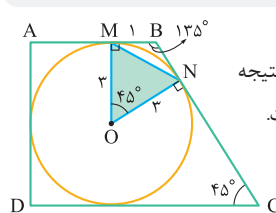
۳ مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی 360° است.

۴ مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب طول

دو ضلع، در سینوس زاویه بین آن‌ها. مثلاً برای مساحت مثلث

روبه‌رو می‌توانیم رابطه‌های زیر را بنویسیم:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} \text{ یا } \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} \text{ یا } \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$



گام ۱ (محاسبه زاویه B)

چهارضلعی ABCD دوزنقه است، پس $AB \parallel CD$ و در نتیجه

طبق مورد (۱) درس‌نامه $135^\circ - 45^\circ = 180^\circ - \hat{B} \Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ است.

گام ۲ (محاسبه زاویه O در مثلث OMN)

OM و ON به ترتیب بر AB و BC عمود هستند و در چهارضلعی BMON، مجموع

زاویه‌های داخلی 360° است، پس $\hat{MON} = 45^\circ$.

شعاع دایره

$$OM = ON = r$$

M و N نقاط تماس اضلاع دوزنقه با دایره هستند، پس:

در نهایت با توجه به مورد (۴) درس‌نامه مساحت مثلث OMN برابر می‌شود با:

$$S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} OM \cdot ON \cdot \sin(\hat{MON}) = \frac{1}{2} \times r \times r \times \sin(45^\circ) = \frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} r^2$$

۳۹ - گزینه ۲

استراتژی برای به دست آوردن طول ارتفاع AH، باید اول مساحت مثلث ABC

را به دست بیاوریم. برای این کار از رابطه $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}|$ استفاده می‌کنیم. در آخر

برای پیدا کردن طول AH، مساحت مثلث را براساس همین ارتفاع می‌نویسیم.

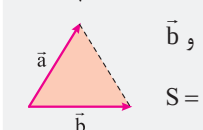
درس‌نامه ۱ اگر A و B مختصات ابتدایی و انتهایی بردار $\overrightarrow{AB}$ باشند، مؤلفه‌های

این بردار را می‌توانیم به کمک رابطه زیر به دست بیاوریم:

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

۲ اندازه بردار $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ برابر است با:



۳ مساحت مثلثی که مطابق شکل مقابل، روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$

ساخته می‌شود، از این رابطه محاسبه می‌شود:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

گام ۱ (محاسبه مساحت مثلث ABC) شکل فرضی زیر را رسم می‌کنیم. برای محاسبه

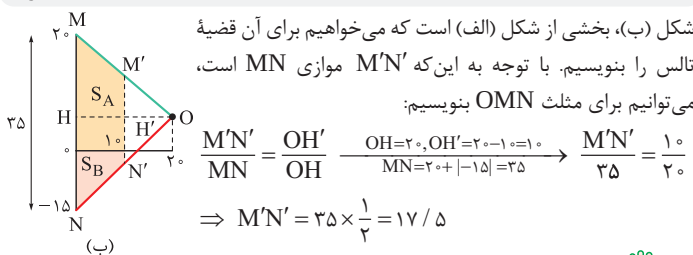
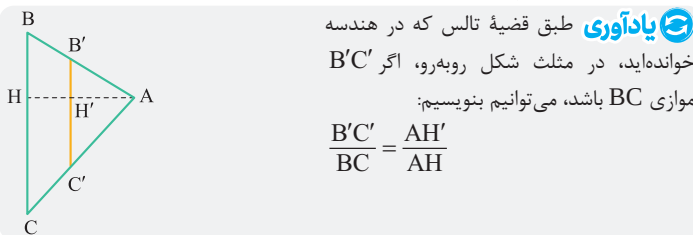
مساحت مثلث ABC، اول به کمک مورد (۱) درس‌نامه بردارهای $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BA}$ را به دست

می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= C - B = (0, -1, 1) - (1, 0, -1) = (-1, -1, 2) \\ \overrightarrow{BA} &= A - B = (-1, 2, 0) - (1, 0, -1) = (-2, 2, 1) \end{aligned}$$



گام ۴ همین‌طور که در شکل (الف) معلوم است، $S_A + S_B$ برابر مساحت دوزنقه $M'N'NM$ است. برای محاسبه مساحت دوزنقه $M'N'NM$ کافی است طول ضلع $M'N'$ را داشته باشیم.



گام ۵ اگر مساحت دوزنقه $M'N'NM$ را حساب کنیم، به جواب تست (که همان مجموع مسافت‌های دو متحرک در بازه زمانی صفر تا ۱۰ s است) می‌رسیم:

$$\ell_A + \ell_B = \text{مساحت دوزنقه } M'N'NM = \frac{(MN) + (M'N')}{2} \times HH' = \frac{35 + 17.5}{2} \times 10 = 262.5 \text{ m}$$

مشاوره در حل بعضی از تست‌های نموداری، بلد بودن و استفاده از قضایای هندسی مثل قضیه تالس یا تشابه مثلث‌ها می‌تواند سرنوشت‌ساز باشد.

روش ۲ این تست را از روش حرکت نسبی دو متحرک هم می‌توانیم حل کنیم. ابتدا نکته زیر را بخوانید.

نکته سرعت نسبی دو متحرک A و B از رابطه $v_{AB} = v_A - v_B$ نسبی حساب می‌شود.

گام ۱ محاسبه سرعت نسبی دو متحرک در لحظه‌های $t_0 = 0 \text{ s}$ و $t_1 = 20 \text{ s}$:

نسبی: $v_{0B} = v_{0A} - v_{0B} = 20 - (-15) = 35 \text{ m/s}$

نسبی: $v_{20B} = v_{20A} - v_{20B} \xrightarrow{v_{20A} = v_{20B}} v_{20B} = 0$

گام ۲ محاسبه شتاب نسبی دو متحرک:

$$a_{\text{نسبی}} = \frac{\Delta v_{\text{نسبی}}}{\Delta t} = \frac{v_{20B} - v_{0B}}{t_1 - t_0} = \frac{0 - 35}{20 - 0} = -\frac{7}{4} \text{ m/s}^2$$

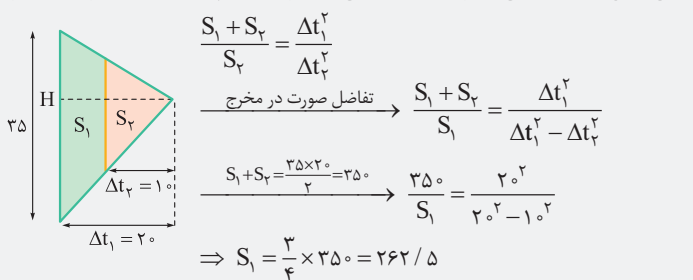
گام ۳ محاسبه مجموع مسافت‌های دو متحرک یا همان جابه‌جایی نسبی دو متحرک در بازه زمانی $t_0 = 0 \text{ s}$ تا $t_1 = 10 \text{ s}$:

$$\Delta x_{(0,10 \text{ s}) \text{ نسبی}} = \frac{1}{2} a_{\text{نسبی}} t_1^2 + v_{0B} t_1$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{7}{4}\right) (10)^2 + 35 \times 10 = -87.5 + 350 = 262.5 \text{ m}$$

$$\xrightarrow{\Delta x_{(0,10 \text{ s}) \text{ نسبی}} = \ell_A + \ell_B} \ell_A + \ell_B = 262.5 \text{ m}$$

تیزبازی از برابری نسبت مساحت مثلث‌های متشابه با نسبت مجذور اضلاع متناظر آن‌ها خیلی سریع‌تر به جواب می‌رسیم. در شکل زیر می‌خواهیم مساحت S_1 را حساب کنیم. پس داریم:



گزینه ۳ - ۴۴

استراتژی باید مسئله را از آخر به اول بررسی کنیم تا استراتژی حل مسئله را کشف کنیم: می‌خواهیم سرعت متوسط در بازه زمانی YS تا $12S$ داشته باشیم. پس باید جابه‌جایی

مشاوره در تست‌هایی که از شما یکای فرعی یک کمیت خواسته می‌شود، به دنبال یکای آن کمیت برحسب یکاهای اصلی باشید.

گزینه ۴ - ۴۲

درس‌نامه ۱ همه آن‌چه درباره واپاشی α باید بدانید را در جدول زیر آورده‌ایم.

نام واپاشی	آلفا (α)
معادله واپاشی	${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-2}^{A-4}Y + {}_2^4\text{He}$
جنس پرتوها	هسته اتم هلیم
نوع بار الکتریکی پرتوها	مثبت
برد	کوتاه
میزان نفوذپذیری	کم (با ورقه سربی با ضخامت حدود ۱ mm / ۰/۰ متوقف می‌شوند).
جرم	سنگین
نمونه	هسته مادر ۱۴۶ ۹۲ ۲۳۸ U اورانیم هسته دختر ۱۴۴ ۹۰ ۲۳۴ Th توریم ذره آلفا ۲ ۲ ۴ He هسته هلیم
توضیحات	۱- در هسته‌های سنگین رخ می‌دهد. ۲- در آشکارسازهای دود کاربرد دارد. ۳- هسته دختر ۲ پروتون و ۲ نوترون کم‌تر از هسته مادر دارد. ۴- عدد اتمی و عدد نوترونی ۲ واحد و عدد جرمی ۴ واحد کاهش می‌یابد.

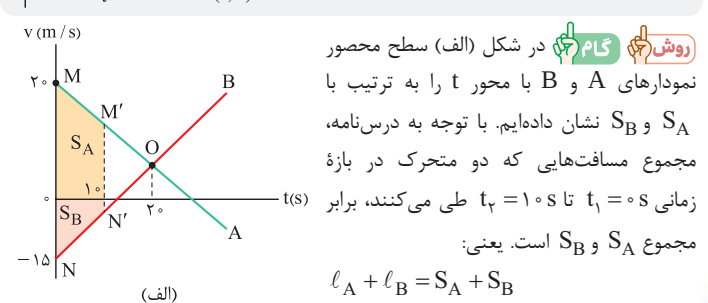
۲ در فرایندهای واپاشی دو اصل مقابل برقرار است: $\diamond$ پایستگی عدد جرمی (پایستگی تعداد نوکلئون‌ها): مجموع تعداد نوکلئون‌های دو طرف فرایند یکسان است. $\diamond$ پایستگی عدد اتمی (پایستگی تعداد پروتون‌ها): مجموع تعداد پروتون‌های دو طرف فرایند یکسان است. با توجه به درس‌نامه بالا، عبارت‌های (ب) و (پ) درست‌اند اما علت نادرستی عبارت‌های (الف) و (ت): (الف) پرتوهای α ، سنگین‌اند و برد کوتاهی دارند. (ت) واپاشی α در هسته‌های سنگین رخ می‌دهد.

مشاوره در فصل‌های فیزیک اتمی و هسته‌ای، خط‌به‌خط متن کتاب درسی مهم است. متن کتاب درسی را خوب بخوانید و روی آن مسلط شوید تا تست‌های نسبتاً آسان این فصل را از دست ندهید. یه پیژ دیگه! برای حل تست‌هایی که با چند عبارت طرف هستید، یک بار نگاهی به تمام عبارت‌ها بیندازید، شاید راحت‌تر و سریع‌تر از آن‌چه که فکر می‌کنید به پاسخ تست برسید. برای مثال توی این تست، درستی عبارت‌های (ب) و (پ) فیلی تابلوه و دیگه لازم نیست عبارت‌های پالشی‌تر (الف) و (ت) بررسی بشه!

گزینه ۲ - ۴۳

استراتژی ۱ در شکل داده‌شده، مساحت‌های محصور در نمودار A و B با محور زمان را در بازه زمانی صفر تا ۱۰ s مشخص کنید. **۲** روشی هندسی پیدا کنید که بتوانید مساحت‌هایی را که مشخص کردید، حساب کنید.

درس‌نامه در نمودار سرعت - زمان، سطح محصور نمودار و محور زمان در یک بازه زمانی معین برابر مسافت طی‌شده است. مثلاً در شکل روبه‌رو مسافت طی‌شده در مدت صفر تا t' برابر S است:

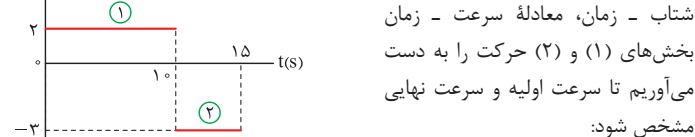


گام ۱ متحرک در بازه زمانی ۷s تا ۳۶m، ۱۰s و در بازه زمانی ۱۰s تا ۱۲s، ۲۴m را جهت مثبت حرکت کرده است. پس جابه‌جایی کل در بازه زمانی ۷s تا ۱۲s برابر مجموع این دو مقدار است:

$$\Delta x_{(7s, 12s)} = \Delta x_{(7s, 10s)} + \Delta x_{(10s, 12s)} = 36 + 24 = 60 \text{ m}$$

گام ۲ حالا همه چیز برای محاسبه سرعت متوسط در بازه زمانی ۷s تا ۱۲s آماده است:

$$v_{av(7s, 12s)} = \frac{\Delta x_{(7s, 12s)}}{\Delta t} = \frac{60}{12-7} = 12 \text{ m/s}$$

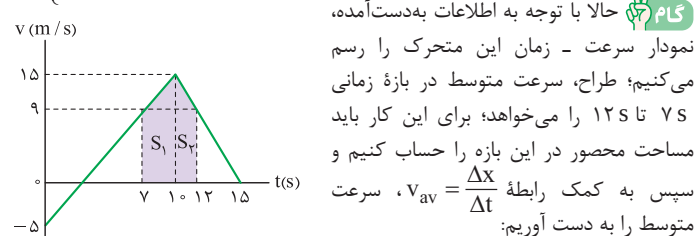


(۱) بخش: $v = a_1 t + v_0 = 2t + v_0$ $\xrightarrow{v=1 \text{ m/s}} 1 = 2 \times 3 + v_0 \Rightarrow v_0 = -5 \text{ m/s}$

$$v = 2t - 5 \Rightarrow \begin{cases} v_{7s} = (2 \times 7) - 5 = 9 \text{ m/s} \\ v_{10s} = (2 \times 10) - 5 = 15 \text{ m/s} \end{cases}$$

(۲) بخش: $v = a_2 t' + v'_0$ $\xrightarrow{v'_0 = v_{10s} = 15 \text{ m/s}} \xrightarrow{t'=t-10} v = -3(t-10) + 15$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{12s} = -3(12-10) + 15 = 9 \text{ m/s} \\ v_{15s} = -3(15-10) + 15 = 0 \end{cases}$$



$$\Delta x_{(7s, 12s)} = S_1 + S_2 = \frac{(9+15)(10-7)}{2} + \frac{(9+15)(12-10)}{2} = 36 + 24 = 60 \text{ m}$$

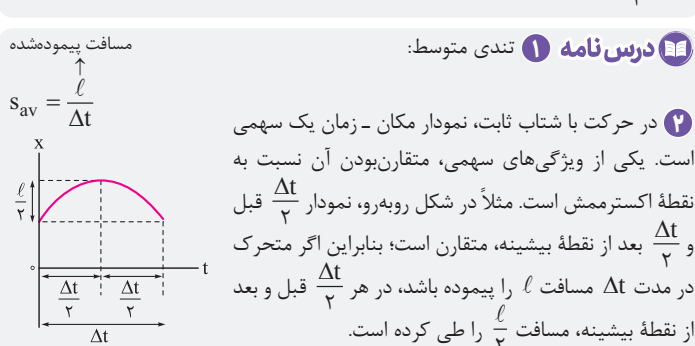
$$v_{av(7s, 12s)} = \frac{\Delta x_{(7s, 12s)}}{\Delta t} = \frac{60}{12-7} = 12 \text{ m/s}$$

تیزبازی در بازه زمانی ۷s تا ۱۲s بیشترین مقدار سرعت ۱۵ m/s و کمترین مقدار آن (در لحظه‌های ۷s و ۱۲s) برابر ۹ m/s است. بنابراین سرعت متوسط حتماً از ۹ m/s بیشتر و از ۱۵ m/s کم‌تر است. یعنی فقط (۳) می‌تواند درست باشد.

۴۵- گزینه ۳

شفاف‌سازی ۱ لحظه‌های $t_1 = 0 \text{ s}$ و $t_2 = 6 \text{ s}$ نسبت به نقطهٔ بیشینه، قرینه‌اند و متحرک در این لحظه‌ها در مکان X_0 قرار دارد. (۲) چند ثانیه بردار مکان متحرک در جهت محور X است: چند ثانیه $X > 0$ بوده و نمودار مکان - زمان بالای محور t است. در واقع تست لحظه برخورد نمودار مکان - زمان با محور t را می‌خواهد.

استراتژی ۱ از تندی متوسط در بازه زمانی صفر تا ۶s شروع می‌کنیم و مسافت طی شده در این بازه را محاسبه می‌کنیم. (۲) از قرینه بودن لحظه‌های $t_1 = 0 \text{ s}$ و $t_2 = 6 \text{ s}$ استفاده می‌کنیم و جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی ۳s تا ۶s را پیدا می‌کنیم. (۳) به کمک رابطه $\Delta x = \frac{1}{2} a \Delta t^2$ شتاب حرکت را به دست می‌آوریم. (۴) یک بار دیگر از رابطه $\Delta x = \frac{1}{2} a \Delta t^2$ استفاده می‌کنیم تا لحظه برخورد نمودار با محور X مشخص شود.



درس‌نامه ۱ تندی متوسط:

(۲) در حرکت با شتاب ثابت، نمودار مکان - زمان یک سهمی است. یکی از ویژگی‌های سهمی، متقارن بودن آن نسبت به نقطهٔ اکسترممش است. مثلاً در شکل روبه‌رو، نمودار $\frac{\Delta t}{2}$ قبل و $\frac{\Delta t}{2}$ بعد از نقطهٔ بیشینه، متقارن است؛ بنابراین اگر متحرک در مدت Δt مسافت l را پیموده باشد، در هر $\frac{\Delta t}{2}$ قبل و بعد از نقطهٔ بیشینه، مسافت $\frac{l}{2}$ را طی کرده است.

کل متحرک را در این بازه زمانی پیدا کنیم. در نمودار می‌بینیم که شتاب در بازه زمانی ۷s تا ۱۰s با شتاب در بازه زمانی ۱۰s تا ۱۲s متفاوت است؛ پس مجبوریم دوتا جابه‌جایی را برای بازه زمانی ۷s تا ۱۰s و بازه زمانی ۱۰s تا ۱۲s محاسبه کنیم. اگر بخواهیم جابه‌جایی‌ها را از فرمول $\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t$ حساب کنیم، باید سرعت متحرک را در ابتدای بازه‌های زمانی‌ای که گفتیم (یعنی v_{7s} و v_{10s}) به دست آوریم بهترین فرمول برای پیدا کردن v_{7s} و v_{10s} همان رابطهٔ اصلی شتاب (یعنی $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$) است.

درس‌نامه ۱ در حرکت با شتاب ثابت، شتاب در هر لحظه برابر با نسبت تغییرات

سرعت به تغییرات زمان در هر بازه زمانی دلخواه است:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

(۲) با داشتن سرعت متحرک در لحظهٔ t_1 می‌توانیم جابه‌جایی متحرک را که با شتاب ثابت حرکت می‌کند، در بازه زمانی t_1 تا t_2 از رابطهٔ زیر حساب کنیم:

$$\Delta x_{(t_1, t_2)} = \frac{1}{2} a (t_2 - t_1)^2 + v_1 (t_2 - t_1)$$

(۳) در نمودار شتاب - زمان، مساحت محصور بین نمودار و محور t در یک بازه زمانی معین بیانگر تغییر سرعت متحرک در آن بازه زمانی است. مثلاً در شکل مقابل، تغییر سرعت متحرک در بازه زمانی صفر تا t' برابر با S است.

اگر نمودار، زیر محور زمان باشد، قبل از S باید علامت منفی قرار دهید.

(۴) در نمودار سرعت - زمان، مساحت محصور بین نمودار و محور t در یک بازه زمانی معین بیانگر جابه‌جایی متحرک در آن بازه زمانی است. مثلاً در شکل مقابل، جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی صفر تا t' برابر با S است.

اگر نمودار، زیر محور زمان باشد، قبل از S باید علامت منفی قرار دهید.

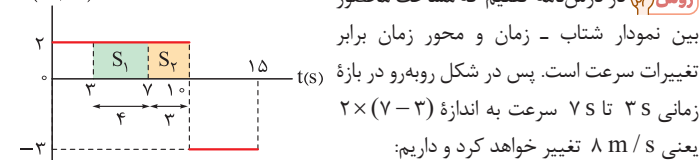
گام ۱ به کمک فرمول اصلی شتاب ($a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$)، سرعت در لحظه‌های ۷s و ۱۰s را حساب می‌کنیم. دقت کنید که شتاب‌ها در نمودار و سرعت در لحظهٔ $t_1 = 3 \text{ s}$ در صورت سؤال داده شده است:

$$a_1 = \frac{v_{7s} - v_{3s}}{t_{7s} - t_{3s}} \xrightarrow{a_1 = 2 \text{ m/s}^2} \xrightarrow{v_{3s} = 1 \text{ m/s}} 2 = \frac{v_{7s} - 1}{7 - 3}$$

$$\Rightarrow v_{7s} - 1 = 8 \Rightarrow v_{7s} = 9 \text{ m/s}$$

$$a_1 = \frac{v_{10s} - v_{3s}}{t_{10s} - t_{3s}} \xrightarrow{a_1 = 2 \text{ m/s}^2} \xrightarrow{v_{3s} = 1 \text{ m/s}} 2 = \frac{v_{10s} - 1}{10 - 3} \Rightarrow v_{10s} - 1 = 14 \Rightarrow v_{10s} = 15 \text{ m/s}$$

روش ۲ در درس‌نامه گفتیم که مساحت محصور بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان برابر تغییرات سرعت است. پس در شکل روبه‌رو در بازه زمانی ۳s تا ۷s سرعت به اندازهٔ $2 \times (7-3)$ یعنی ۸ m/s تغییر خواهد کرد و داریم:



$$\Delta v_{(3s, 7s)} = S_1 \Rightarrow v_{7s} - v_{3s} = S_1$$

$$\xrightarrow{v_{3s} = 1 \text{ m/s}} v_{7s} - 1 = 2 \times (7-3) \Rightarrow v_{7s} = 9 \text{ m/s}$$

و همچنین برای بازه‌های ۷s تا ۱۰s می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta v_{(7s, 10s)} = S_2 \Rightarrow v_{10s} - v_{7s} = S_2$$

$$\xrightarrow{v_{7s} = 9 \text{ m/s}} v_{10s} - 9 = 2 \times (10-7) \Rightarrow v_{10s} = 15 \text{ m/s}$$

گام ۲ به کمک رابطه $\Delta x_{(t_1, t_2)} = \frac{1}{2} a (t_2 - t_1)^2 + v_1 (t_2 - t_1)$ جابه‌جایی متحرک را در بازه زمانی ۷s تا ۱۰s و همچنین ۱۰s تا ۱۲s به دست می‌آوریم:

$$\Delta x_{(7s, 10s)} = \frac{1}{2} a_1 (10-7)^2 + v_{7s} (10-7)$$

$$\xrightarrow{a_1 = 2 \text{ m/s}^2} \xrightarrow{v_{7s} = 9 \text{ m/s}} \Delta x_{(7s, 10s)} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3^2 + 9 \times 3 = 36 \text{ m}$$

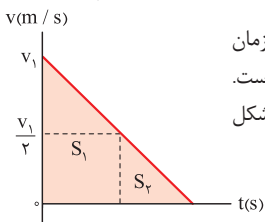
$$\Delta x_{(10s, 12s)} = \frac{1}{2} a_2 (12-10)^2 + v_{10s} (12-10)$$

$$\xrightarrow{a_2 = -3 \text{ m/s}^2} \xrightarrow{v_{10s} = 15 \text{ m/s}} \Delta x_{(10s, 12s)} = \frac{1}{2} \times (-3) \times 2^2 + 15 \times 2 = 24 \text{ m}$$



$$\begin{cases} v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x_1 \\ v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x_2 \end{cases} \xrightarrow{v_2 = \frac{v_1}{2}} \frac{(\frac{v_1}{2})^2 - v_1^2}{0 - v_1^2} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{v_1^2}{4} - v_1^2}{-v_1^2} = \frac{150}{\Delta x_2} \Rightarrow \frac{3v_1^2}{4v_1^2} = \frac{150}{\Delta x_2} \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{4 \times 150}{3} = 200 \text{ m}$$



روش می‌دانیم مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان بیانگر مسافت طی شده توسط متحرک است. بنابراین نمودار سرعت - زمان این حرکت را به صورت شکل روبه‌رو رسم می‌کنیم.

یادآوری در مثلث‌های متشابه، نسبت مساحت‌های دو مثلث برابر با مجذور نسبت اضلاع متناظر است.

به کمک یادآوری بالا، تست را حل می‌کنیم.

در این شکل S_1 همان 150 متر اول است که در صورت سؤال گفته و خواسته سؤال $S_1 + S_2$ است.

$$\frac{S_1 + S_2}{S_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{150 + S_2}{S_2} = \frac{4}{1} \Rightarrow 4S_2 = 150 + S_2 \Rightarrow 3S_2 = 150$$

$$\Rightarrow S_2 = 50 \text{ m}$$

$$\Delta x_{\text{کل}} = S_1 + S_2 = 150 + 50 = 200 \text{ m}$$

مشاوره شاید متوجه شده باشید که در این آزمون خبری از تست حرکت سقوط آزاد نبود! در حالی که این مبحث همیشه پای ثابت کنکورهای رشته ریاضی بوده، دلیلش اینه که در سال ۱۴۰۰ به دلیل همه‌گیری کرونا، سقوط آزاد از کنکور حذف شده بود. پس این موضوع فقط یک اتفاق برای اون سال بوده و دیگه تکرار نمی‌شه.

۴۷ - گزینه ۱

شفاف‌سازی در آستانه سرخوردن است: نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر جسم بیشینه است.

درس‌نامه ۱ وقتی جسم در آستانه حرکت است، نیروی اصطکاک وارد بر آن اندازه نیروی عمودی سطح

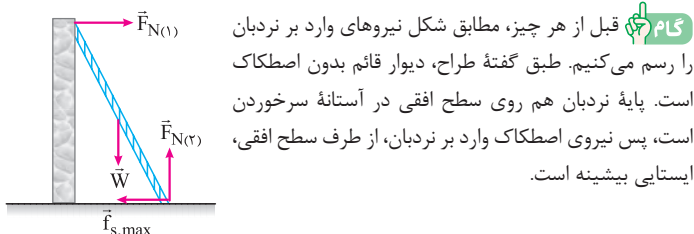
$$f_{s, \max} = \mu_s F_N$$

ضریب اصطکاک ایستایی

۲ اندازه نیروی سطح (نیروی تکیه‌گاه، نیروی واکنش سطح) برابر است با:

$$R = \sqrt{f^2 + F_N^2}$$

در رابطه بالا، f نیروی اصطکاک وارد بر جسم است که می‌تواند ایستایی، بیشینه و جنبشی باشد.



گام ۱ قبل از هر چیز، مطابق شکل نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم. طبق گفته طراح، دیوار قائم بدون اصطکاک است. پایه نردبان هم روی سطح افقی در آستانه سرخوردن است، پس نیروی اصطکاک وارد بر نردبان، از طرف سطح افقی، ایستایی بیشینه است.

گام ۲ با توجه به شکل، از طرف سطح افقی دو نیروی $\vec{F}_{N(2)}$ و $\vec{f}_{s, \max}$ به نردبان وارد می‌شود؛ نردبان نیز واکنش این نیرو را به سطح وارد می‌کند که برابر 200 N است؛ با این حساب:

$$R = \sqrt{F_{N(2)}^2 + f_{s, \max}^2} = 200 \Rightarrow \sqrt{160^2 + f_{s, \max}^2} = 200$$

$$\Rightarrow f_{s, \max}^2 = 200^2 - 160^2 = (200 - 160)(200 + 160) = 40 \times 360$$

$$\Rightarrow f_{s, \max} = 2 \times 60 = 120 \text{ N}$$

۳ در نقطه بیشینه یا کمینه نمودار مکان - زمان، حرکت راست خط شتاب ثابت، سرعت متحرک صفر شده و تغییر جهت می‌دهد؛ بنابراین جابه‌جایی متحرک از لحظه تغییر جهت تا Δt ثانیه بعد از آن از رابطه روبه‌رو محاسبه شود:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$$

۴ در لحظه‌ای که نمودار مکان - زمان محور t را قطع می‌کند، بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد.

گام ۱ با داشتن تندی متوسط در بازه زمانی صفر تا 6 s ، مسافت طی شده در این مدت و سپس جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی 3 s تا 6 s را حساب می‌کنیم:

$$s_{av(0,6s)} = \frac{\ell(0,6s)}{\Delta t} \Rightarrow 3 = \frac{\ell(0,6s)}{6 - 0} \Rightarrow \ell(0,6s) = 18 \text{ m}$$

با توجه به متقارن بودن نمودار روبه‌رو، اندازه جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی 3 s تا 6 s برابر نصف مسافت طی شده

در بازه زمانی صفر تا 6 s است:

$$\Delta x(3,6s) = -\frac{\ell(0,6s)}{2} = \frac{-18}{2} = -9 \text{ m}$$

گام ۲ می‌دانیم در نقطه اکسترمم، سرعت متحرک صفر است. پس برای محاسبه شتاب کافی است رابطه $\Delta x = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$ را برای بازه زمانی 3 s تا 6 s بنویسیم:

$$\Delta x(3,6s) = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \Rightarrow -9 = \frac{1}{2} a \times (6 - 3)^2 \Rightarrow a = -2 \text{ m/s}^2$$

گام ۳ می‌خواهیم لحظه‌ای که بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد را پیدا کنیم؛ یعنی لحظه‌ای که نمودار محور t را قطع کرده است. برای این کار رابطه $\Delta x = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$ را برای بازه زمانی 3 s تا t' می‌نویسیم:

$$\Delta x(3,t') = \frac{1}{2} a (t' - 3)^2 \xrightarrow{\Delta x(3,t') = -16 \text{ m}} -16 = \frac{1}{2} \times (-2) \times (t' - 3)^2$$

$$\Rightarrow (t' - 3)^2 = 16 \Rightarrow t' - 3 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} t' = 7 \text{ s} \\ t' = -1 \text{ s} \end{cases}$$

غلق

بردار مکان متحرک در لحظه $t' = 7 \text{ s}$ ، از مثبت به منفی تغییر جهت می‌دهد؛ پس در بازه زمانی صفر تا 7 s بردار مکان مثبت (در جهت محور x) است.

تیزبازی بدون محاسبه شتاب و با نوشتن نسبت زیر می‌توانیم گام‌های دوم و سوم را دور بزنیم و و سریع‌تر به جواب برسیم:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \xrightarrow{\text{شتاب ثابت است}} \frac{\Delta x(3,t')}{\Delta x(3,6s)} = \left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^2 \Rightarrow \frac{-16}{-9} = \left(\frac{t' - 3}{6 - 3}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{t' - 3}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow t' = 7 \text{ s}$$

تله حواستون باشه! تست گفته بردار مکان در جهت محور x باشد. اگه بردار مکان را با بردار جابه‌جایی اشتباه بگیرید، به گزینه اشتباه یعنی **۴** می‌رسید.

۴۶ - گزینه ۲

استراتژی زمان حرکت را نه داده و نه خواسته، پس رابطه مناسب، رابطه مستقل از زمان است. از یکسان بودن شتاب در دو مرحله حرکت استفاده می‌کنیم و به جواب تست می‌رسیم.

درس‌نامه ۱ اگر در حرکت با شتاب ثابت، زمان حرکت داده یا خواسته نشود، استفاده از رابطه مقابل یک انتخاب منطقی است:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

۲ اگر در یک حرکت شتاب ثابت، سرعت متحرک در ابتدا یا انتهای مسیر صفر باشد، می‌توانیم رابطه مستقل از زمان را به صورت نسبت بنویسیم. مثلاً در شکل زیر سرعت در انتهای مسیر صفر است. بنابراین برای جابه‌جایی‌های Δx_1 و Δx_2 می‌توانیم بگوییم:

$$\frac{\Delta x_1}{v_1^2 - v_0^2} = \frac{\Delta x_2}{v_2^2 - v_0^2} \xrightarrow{v_2 = 0} \frac{\Delta x_1}{v_1^2 - v_0^2} = \frac{\Delta x_2}{0 - v_0^2}$$

روش ابتدا مانند شکل زیر، شکل مناسبی از مسیر حرکت را رسم می‌کنیم. با توجه به این که شتاب در کل مسیر یکسان است، از رابطه مستقل از زمان کمک می‌گیریم و نسبت $\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$ را می‌نویسیم:

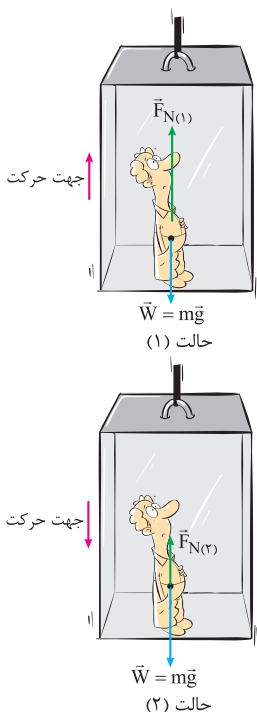
گزینه ۳ - ۴۹

استراتژی ۱: برای حل تست‌های آسانسوری! مثل این تست، روند زیر را طی می‌کنیم:

۱ نیروهای وارد بر جسم را مشخص می‌کنیم. یک نیرو که همیشه با آن سروکار داریم، وزن است. نیروی دیگر هم در بیشتر تست‌ها، یا نیروی عمودی سطح است (که از کف اتاقک آسانسور به جسم وارد می‌شود)، یا نیروی کشسانی فنر (که از طرف فنری که جسم را به سقف اتاقک آسانسور متصل کرده وارد می‌شود). ۲ نیروی موافق حرکت جسم (نیروی که در جهت حرکت جسم است) را از نیروی مخالف حرکت جسم (نیروی که در خلاف جهت حرکت جسم است). کم کرده و حاصل را برابر ma قرار می‌دهیم؛ یعنی:

$$F_{\text{مخالف}} - F_{\text{موافق}} = ma$$

در رابطه بالا، اگر حرکت جسم تندشونده باشد، $a > 0$ و اگر حرکت جسم کندشونده باشد، $a < 0$ است.



گام ۲: اختلاف دو نیروی عمودی سطح را می‌دانیم؛ بنابراین:

$$F_{N(1)} - F_{N(2)} = 270 \Rightarrow (600 + 60a) - (600 - 120a) = 270$$

$$\Rightarrow 180a = 270 \Rightarrow a = \frac{3}{4} \text{ m/s}^2$$

نکته: اگر تغییر نیروی خالص وارد بر جسم برابر ΔF_{net} و تغییر شتاب ناشی از آن برابر Δa باشد، از قانون دوم نیوتون می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$\Delta F_{\text{net}} = m \Delta a$$

با توجه به نکته بالا، در این تست، دلیل تغییر نیروی خالص، نیروی عمودی سطح وارد بر شخص است. بنابراین داریم:

$$|\Delta F_N| = m |\Delta a|$$

حواستان باشد که در حالت اول شتاب برابر a ، رو به بالا و در حالت دوم شتاب برابر $2a$ ، رو به پایین است. در نتیجه داریم: $|\Delta a| = 3a$ ؛ بنابراین:

$$|\Delta F_N| = m |\Delta a| \Rightarrow 270 = 60 \times 3a \Rightarrow a = \frac{3}{4} \text{ m/s}^2$$

گزینه ۴ - ۵۰

درس‌نامه ۱: درباره ماهواره‌ای که در مدار دایره‌ای به شعاع r به دور زمین می‌چرخد، باید تناسب‌های زیر را بدانید:

کمیت	شتاب مرکزگرا (a)	تندی (v)	دوره گردش (T)
تناسب	$\frac{a_2}{a_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$	$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$	$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3}$

اگر فاصله ماهواره از سطح زمین h باشد، $r = R_e + h$ است (R_e شعاع کره زمین).

۲ انرژی جنبشی ماهواره‌ای به جرم m که با تندی v در حال چرخش است، از رابطه $K = \frac{1}{2}mv^2$ روبرو به دست می‌آید:

تیزبازی: برای محاسبه $f_{s,\text{max}}$ از الگوی اعداد فیثاغورسی $3k$ ، $4k$ و $5k$ نیز می‌توان استفاده کرد؛ یعنی:

$$\begin{cases} R = 200 = 5 \times 40 \\ F_{N(r)} = 160 = 4 \times 40 \end{cases} \Rightarrow f_{s,\text{max}} = 3 \times 40 = 120$$

گام ۱: ضریب اصطکاک ایستایی برابر است با:

$$f_{s,\text{max}} = \mu_s F_{N(r)} = 120 \Rightarrow 160 \mu_s = 120 \Rightarrow \mu_s = \frac{120}{160} = \frac{3}{4}$$

مشاوره: این تست نمونه خوبی از میزان اهمیت کتاب درسی در کنکور است. تمرین‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی را جدی بگیرید و حداقل یک بار آن‌ها را حل کنید. ارزش این کار را روز کنکورتان خواهید فهمید.

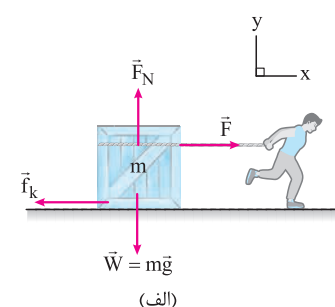
گزینه ۱ - ۴۸

استراتژی ۱: در حالت اول (قبل از کم شدن جرم) نیروهای وارد بر جسم را مشخص کرده و سپس به کمک قانون دوم نیوتون F را تعیین می‌کنیم. ۲ جرم کل صندوق را در حالت دوم (بعد از کم شدن جرم) m' در نظر گرفته و قانون دوم نیوتون را برای این حالت هم اعمال می‌کنیم. با این کار m و در نتیجه جرم کم‌شده به دست می‌آید.

درس‌نامه: نیروی اصطکاک وارد بر جسمی که در حال حرکت است، جنبشی است و اندازه آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \text{اندازه نیروی عمودی سطح} & \uparrow \\ f_k &= \mu_k F_N \\ \text{ضریب اصطکاک جنبشی} & \downarrow \end{aligned}$$

روش گام ۱: مطابق شکل (الف)، نیروهای وارد بر صندوق را در حالت اول رسم می‌کنیم و قانون دوم نیوتون را برای راستاهای x و y می‌نویسیم:

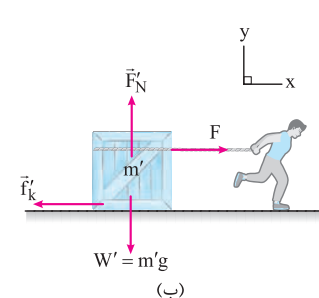


$$\begin{aligned} \text{در راستای } y: F_N - mg &= 0 \\ \Rightarrow F_N = mg &= 160 \times 10 = 1600 \text{ N} \end{aligned}$$

$$f_k = \mu_k F_N = \frac{2}{10} \times 1600 = 320 \text{ N}$$

$$\text{در راستای } x: F - f_k = ma \Rightarrow F - 320 = 160 \times \frac{25}{100} \Rightarrow F = 360 \text{ N}$$

گام ۲: حالا مجموع جرم صندوق و محتویات آن را در حالت دوم m' در نظر گرفته و با توجه به شکل (ب)، قانون دوم نیوتون را برای راستاهای x و y می‌نویسیم:



$$\text{در راستای } y: F'_N - m'g = 0$$

$$\Rightarrow F'_N = m'g = 10m'$$

$$f'_k = F'_N \mu_k = (10m') \times \frac{2}{10} = 2m'$$

$$\begin{aligned} \text{در راستای } x: F - f'_k &= m'a' \xrightarrow{a' = 2a = 2 \times 0.25 = 0.5 \text{ m/s}^2} 360 - 2m' = m' \times 0.5 \\ \Rightarrow 2/5 m' &= 360 \Rightarrow m' = 144 \text{ kg} \end{aligned}$$

روش: می‌توانیم گام‌های اول و دوم را یک‌جا بنویسیم:

$$\begin{aligned} F - f_k &= ma \Rightarrow F - \mu_k mg = ma \Rightarrow F = m(a + \mu_k g) \\ \xrightarrow{\text{ثابت } F} m(a + \mu_k g) &= m'(a' + \mu_k g) \Rightarrow \frac{m'}{m} = \frac{a + \mu_k g}{a' + \mu_k g} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{m'}{160} = \frac{0.25 + (0.2 \times 10)}{(2 \times 0.25) + (0.2 \times 10)} \Rightarrow m' = 160 \times \frac{2/25}{2/5} = 144 \text{ kg}$$

خواسته تست، تفاضل جرم محتویات صندوق است؛ بنابراین:

$$\Delta m = m - m' = 160 - 144 = 16 \text{ kg}$$



پس کنار می‌روند. دو ذره B و D در حال نزدیک شدن به نقطه بازگشت خود هستند، اما چون در این لحظه، ذره B در مقایسه با ذره D به نقطه بازگشت خود نزدیک تر است، زودتر به آن می‌رسد و زودتر تندی‌اش صفر می‌شود.

تله همیشه یادتان باشد که ذره X می‌خواهد شبیه ذرات قبل از خود شود و تشخیص ذرات قبل از X براساس جهت انتشار موج انجام می‌شود. هر گونه بی‌دقتی در این موضوع شما را به گزینه نادرست می‌رساند. در این تست، **بی‌رحمانه** منتظر بی‌دقتی شماست.



۵۳- گزینه ۱

درس نامه فرمول‌های مربوط به شدت صوت و تراز شدت صوت را ببینید:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{E}{At}$$

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \text{ (dB)}$$

$$(I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \text{ : شدت صوت مرجع})$$

برای حل تست‌های این مبحث روابط لگاریتمی زیر به کارتان می‌آید:

$$\log A^n = n \log A, \log(AB) = \log(A) + \log(B),$$

$$\log \left(\frac{A}{B} \right) = \log(A) - \log(B)$$

گام ۱ ابتدا شدت صوت را در این محل حساب می‌کنیم:

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \Rightarrow 96 = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \Rightarrow 9.6 = \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

$$\Rightarrow 9 + 2 \times \left(\frac{0}{\log 2} \right) = \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \Rightarrow \log(10^9) + \log(2^2) = \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

$$\Rightarrow 4 \times 10^9 = \frac{I}{I_0} \Rightarrow 4 \times 10^9 = \frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow I = 4 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2$$

$$I = \frac{E}{At} \Rightarrow 4 \times 10^{-3} = \frac{E}{(1 \times 10^{-6}) \times 60} \Rightarrow E = 0.24 \times 10^{-6} \text{ J}$$

$$10^{-6} \text{ J} = 1 \mu\text{J} \Rightarrow E = 0.24 \mu\text{J}$$

مشاوره در حل تست‌های مبحث تراز شدت صوت، مهم‌ترین مهارت، حل رابطه لگاریتمی است. در این تست‌ها اغلب $\log 2 = 0.3$ را می‌دهند و شما باید یاد بگیرید که چگونه عددی که با آن سروکار دارید را به صورت مجموع یک عدد صحیح و یک عدد برحسب 0.3 بنویسید. چند نمونه ببینید:

$$\diamond 5/1 = 6 - (3 \times 0.3)$$

$$\diamond 5/2 = 4 + (4 \times 0.3)$$

$$\diamond 5/3 = 5 + 0.3$$

$$\diamond 5/4 = 6 - (2 \times 0.3)$$

$$\diamond 5/5 = 4 + (5 \times 0.3)$$



۵۴- گزینه ۳

درس نامه قانون شکست عمومی؛ وقتی جبهه‌های موج به شکل زیر از محیط (۱) وارد محیط (۲) می‌شوند، داریم:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}$$

در رابطه بالا، θ در هر محیط، زاویه بین جبهه‌های موج با مرز است.

با تغییر محیط انتشار موج، بسامد آن تغییر نمی‌کند.

گام ۱ جبهه‌های موج با مرز جدایی دو محیط، در محیط‌های (۱) و (۲) به ترتیب زاویه 45° و 30° ساخته‌اند. پس:

گام ۲ حالا با توجه به قانون شکست عمومی داریم:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{1} = \sqrt{2}$$

گام ۱ ابتدا با توجه به درس‌نامه صفحه قبل، نسبت تندی دو ماهواره را به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} = \sqrt{\frac{R_e + \frac{R_e}{4}}{R_e + \frac{R_e}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{5}{4} R_e}{\frac{3}{2} R_e}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

گام ۲ حالا داریم:

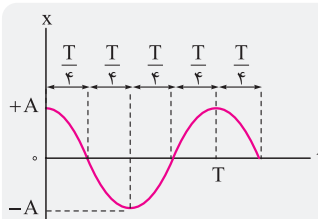
$$K = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \frac{K_A}{K_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \left(\frac{v_A}{v_B} \right)^2 = \frac{m}{m} \times \left(\sqrt{\frac{5}{6}} \right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$$



۵۱- گزینه ۲

درس نامه ۱ نمودار مکان - زمان

حرکت هماهنگ ساده به شکل مقابل است:



۲ بسامد زاویه‌ای نوسانگر:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \text{دوره نوسان}$$

۳ رابطه نیرو - مکان در حرکت هماهنگ ساده:

$$F = -m\omega^2 x \Rightarrow F_{\max} = m\omega^2 A$$

گام ۱ ابتدا به کمک نمودار داده شده، دوره

تناوب نوسانگر را حساب می‌کنیم. لحظه $t = \frac{\pi}{4} \text{ s}$

داده شده در نمودار، معادل با $T + \frac{T}{4}$ است، بنابراین:

$$T + \frac{T}{4} = \frac{\pi}{\omega} \Rightarrow \frac{5T}{4} = \frac{\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{\pi}{\omega}$$

گام ۲ حالا بسامد زاویه‌ای نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{\omega}} = 1 \text{ rad/s}$$

گام ۳ از آن جایی که مکان متحرک را در لحظه t_1 داریم، برای به دست آوردن اندازه

نیروی خالص وارد بر آن در لحظه t_1 ، از رابطه نیرو - مکان استفاده می‌کنیم؛ یعنی:

$$F = -m\omega^2 x = -\frac{2}{10} \times (1^2) \times \left(\frac{-1}{10} \right) = 0.2 \text{ N}$$

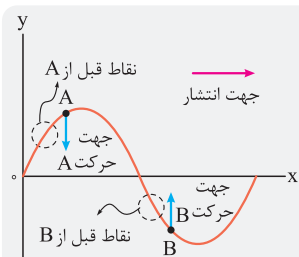


۵۲- گزینه ۲

درس نامه ۱ در یک موج عرضی، برای

تعیین جهت حرکت هر یک از ذرات محیط در هر

لحظه، از قاعده مقابل استفاده می‌کنیم:



با توجه به جهت انتشار، هر ذره (نقطه) قرار است شبیه ذرات (نقاط) قبل از خود شود.

۲ در حرکت هماهنگ ساده، تندی نوسانگر در نقطه تعادل، بیشینه و در نقاط بازگشت برابر صفر است.

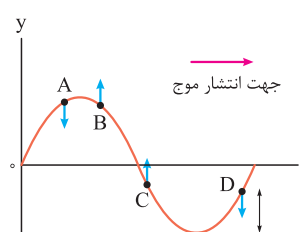
گام ۱ ابتدا با توجه به جهت انتشار موج، جهت

حرکت هر یک از ذرات را پس از این لحظه مشخص

می‌کنیم. از آن جایی که هر ذره قرار است شبیه

ذرات قبل از خود شود، جهت حرکت هر یک از

ذرات به شکل مقابل است:



گام ۲ حالا باید تعیین کنیم که کدام یک از چهار ذره زودتر به نقطه بازگشت خود (که تندی

در آنجا برابر صفر است) می‌رسد. ذرات A و C که در حال دور شدن از نقطه بازگشت هستند،



۵۷- گزینه ۴

درس نامه طبق مدل اتمی بور، انرژی الکترون در مدار n ام در اتم هیدروژن، از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:

$$E_n = \frac{-E_R}{n^2} \quad (E_R = 13.6 \text{ eV} \text{ یک ریذبرگ})$$

شماره مدار الکترون

گام ۱ شماره مدار مبدأ (n_1) و مقصد (n_2) الکترون را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} \Rightarrow \begin{cases} -0.85 = \frac{-13.6}{n_1^2} \Rightarrow n_1 = 4 \\ -0.544 = \frac{-13.6}{n_2^2} \Rightarrow n_2 = 5 \end{cases}$$

نکته در اتم هیدروژن، $n=1$ حالت پایه، $n=2$ اولین حالت برانگیخته، $n=3$ دومین حالت برانگیخته و ... نامیده می‌شود؛ بنابراین تراز n ام، همان ($K=n-1$) آمین حالت برانگیخته است.

با توجه به نکته بالا، $n_1=4$ سومین ($K=4-1=3$) حالت برانگیخته و $n_2=5$ چهارمین ($L=5-1=4$) حالت برانگیخته است.

تیزبازی با توجه به گزینه‌ها، می‌توانستیم فقط n_1 و K را به دست آوریم و به جواب تست برسیم.

تله در قسمت‌هایی که با شماره حالت برانگیخته سروکار دارید، به هیچ‌وجه عجله نکنید. شماره حالت برانگیخته، $n-1$ است نه n ! در این تست (۲) برای دانش‌آموزان عجول قرار داده شده است.

۵۸- گزینه ۴

استراتژی برای بررسی فرایندهای مربوط به واپاشی مراحل زیر را به ترتیب طی می‌کنیم:

- ۱) فرایند واپاشی را می‌نویسیم (آله فرایند توی صورت تست داده شده بود، نیازی به این مرحله نداریم).
- ۲) پایستگی عدد جرمی و پایستگی عدد اتمی را برای اجزای دو طرف فرایند می‌نویسیم تا خواسته تست به دست آید.

درس نامه ۱ عدد جرمی: مجموع تعداد پروتون‌ها (عدد اتمی) و نوترون‌ها (عدد نوترونی)

$$A = Z + N$$

۲ در فرایندهای واپاشی دو اصل زیر برقرار است:

- ♦ پایستگی عدد جرمی (پایستگی تعداد نوکلئون‌ها): مجموع تعداد نوکلئون‌های دو طرف فرایند یکسان است.
- ♦ پایستگی عدد اتمی (پایستگی تعداد پروتون‌ها): مجموع تعداد پروتون‌های دو طرف فرایند یکسان است.

گام ۱ **نکته** ذره β^- همان الکترون (${}_{-1}^0\beta^-$) است.

ابتدا فرایند واپاشی را می‌نویسیم (هسته دختر را با ${}^A_ZY$ نشان دادیم).

$${}^{234}_{90}\text{Th} \rightarrow {}^A_ZY + {}_{-1}^0\beta^-$$

پایستگی عدد جرمی و پایستگی عدد اتمی را برای اجزای دو طرف فرایند می‌نویسیم:

$$234 = A + 0 \Rightarrow A = 234$$

$90 = Z - 1 \Rightarrow Z = 91$

گام ۲ حالا تعداد نوترون‌های (عدد نوترونی) هسته دختر را به دست می‌آوریم:

$N = A - Z \xrightarrow{Z=91} N = 234 - 91 = 143$

در پایان نسبت عدد اتمی هسته دختر به عدد نوترونی آن را می‌نویسیم:

$$\frac{Z}{N} = \frac{91}{143}$$

۵۹- گزینه ۲

شفاف‌سازی میدان الکتریکی خالص در مرکز مربع برابر صفر باشد: بارهای یکسان در رأس‌های مقابل هم قرار بگیرند.

۵۵- گزینه ۱

درس نامه

♦ بسامد هماهنگ n ام موج ایستاده تشکیل شده در یک تار دو انتها بسته به طول L ، از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$f_n = \frac{nv}{2L}$$

♦ به بسامد هماهنگ اول ($n=1$)، بسامد اصلی می‌گوییم:

$$f_1 = \frac{v}{2L}$$

♦ بسامد هماهنگ n ام، n برابر بسامد اصلی است:

$$f_n = nf_1$$

♦ اختلاف بسامد دو هماهنگ متوالی برابر است با بسامد اصلی. مثلاً:

$$f_n - f_{n-1} = f_1$$

گام ۱ در درس‌نامه بالا دیدیم که اختلاف بسامد دو هماهنگ متوالی تار برابر با بسامد اصلی آن است. بنابراین:

$$f_1 = 225 - 150 = 75 \text{ Hz}$$

گام ۲ حالا طبق رابطه زیر داریم:

$f_n = \frac{nv}{2L} \xrightarrow{n=1} f_1 = \frac{v}{2L} \Rightarrow 75 = \frac{v}{2 \times 0.5} \Rightarrow v = 75 \text{ m/s}$

مشاوره بررسی کنکوره‌های چند سال اخیر نشان می‌دهد که طراحان کنکور ارادت ویژه‌ای به بحث بسامدهای تشدیدی تار دارند. با دانستن چند فرمول به راحتی از پس حل تست‌های آن برمی‌آیید.

۵۶- گزینه ۳

درس نامه در اثر فوتوالکتریک، انرژی جنبشی سریع‌ترین فوتوالکترئون‌های گسیل شده از سطح فلز، از رابطه زیر به دست می‌آید:

بسامد آستانه فلز f_0 بسامد نور فرودی f طول موج آستانه فلز λ_0 طول موج نور فرودی λ

$$K_{\max} = hf - hf_0 \xrightarrow{f=\frac{c}{\lambda}} K_{\max} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_0}$$

و $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ و $hc = 1.24 \times 10^{-6} \text{ eV.m}$ ثابت پلانک

تندی نور در خلأ $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

♦ الکترون‌ولت (eV) یکای متداول انرژی در فیزیک اتمی و هسته‌ای است. تبدیل eV به J و برعکس به صورت مقابل انجام می‌شود:

$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$

گام ۱ $K_{\max}$ را در دو حالت بر حسب الکترون‌ولت محاسبه می‌کنیم:

$K_{\max(1)} = \frac{6.6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1.6 \times 10^{-19}} = 4 \text{ eV}$

$K_{\max(2)} = \frac{25}{100} K_{\max(1)} = \frac{1}{4} \times 4 = 1 \text{ eV}$

گام ۲ حالا با قراردادن اطلاعات مسئله در رابطه $K_{\max} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_0}$ یک دستگاه دو معادله - دو مجهول می‌سازیم و طول موج آستانه را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} 4 = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_0} \\ 1 = \frac{hc}{2\lambda} - \frac{hc}{\lambda_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{\lambda} \\ 2 + \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{2\lambda} \end{cases} \Rightarrow 4 + \frac{hc}{\lambda_0} = 2 + \frac{hc}{\lambda_0} \Rightarrow \frac{hc}{\lambda_0} = 2$$

$$\xrightarrow{hc=1200 \text{ eV.nm}} \lambda_0 = \frac{1200}{2} = 600 \text{ nm}$$

گام ۳ در این قسمت تندی نور در خلأ داده نشده و شما باید از دانسته‌های خودتان آن را

برابر $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ فرض کنید:

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3 \times 10^8}{600 \times 10^{-9}} = 5 \times 10^{14} \text{ Hz} = 500 \text{ THz}$$

مشاوره بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترئون‌ها از تست خیزترین مباحث فصل فیزیک اتمی در کنکور است. برای تست‌های نسبتاً آسان این بحث دانستن ۲، ۳ فرمول کافی است. در تست‌های کمی سخت‌تر مانند همین تست، علاوه بر دانستن فرمول‌ها، باید مهارت کافی در حل معادلات را داشته باشید.



گام ۷ نسبت نیروی خالص وارد بر بار q_2 را در حالت دوم به حالت اول (یعنی $\frac{F_2}{F_1}$) می‌خواهیم:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{126F_{12}}{6F_{12}} = 21$$



۶۱- گزینه ۱

درس نامه ۱ اگر بار الکتریکی روی صفحه‌های خازنی برابر Q و اختلاف پتانسیل

بین صفحه‌های آن برابر V باشد، ظرفیت خازن برابر است با:

۲ ظرفیت خازن تختی که با دی‌الکتریک با ثابت K کاملاً پر شده است، از رابطه زیر به مساحت هر یک از صفحه‌های خازن دست می‌آید:

$$C = K \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

ثابت
فاصله بین صفحه‌های خازن

$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ ضریب گذرایی الکتریکی خلأ

۳ انرژی ذخیره‌شده در خازنی به ظرفیت C که بار الکتریکی آن Q است، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

گام ۴ با خارج کردن دی‌الکتریک، ثابت دی‌الکتریک خازن از $K_1 = 2$ به $K_2 = 1$ می‌رسد، پس:

$$C \propto K \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \frac{K_2}{K_1} = \frac{1}{2}$$

گام ۵ بار الکتریکی خازن ثابت است، بنابراین به کمک رابطه $C = \frac{Q}{V}$ داریم:

$$C \propto \frac{1}{V} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{C_1}{C_2} = 2$$

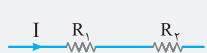
گام ۶ برای محاسبه نسبت انرژی ذخیره‌شده در خازن در دو حالت هم از رابطه $U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ استفاده می‌کنیم:

$$U \propto \frac{1}{C} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_1}{C_2} = 2$$



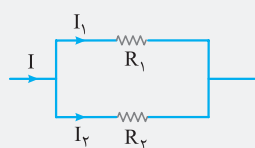
۶۲- گزینه ۴

درس نامه ۱ مطابق شکل زیر، دو مقاومت R_1 و R_2 به صورت متوالی (سری) به هم متصل‌اند:



$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

♦ مقاومت معادل این دو مقاومت:



۲ مطابق شکل روبه‌رو، دو مقاومت R_1 و R_2 به صورت موازی به هم متصل‌اند:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

♦ مقاومت معادل این دو مقاومت:

$$R_{eq} = \frac{\text{مقاومت بزرگ‌تر}}{n+1}$$

♦ اگر مقاومت بزرگ‌تر، n برابر مقاومت کوچک‌تر باشد:

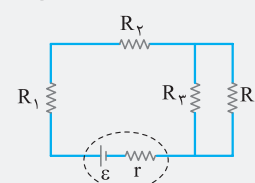
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

♦ نسبت جریان عبوری از مقاومت‌ها برابر با وارون نسبت مقاومت‌ها است:

$$I = I_1 + I_2$$

♦ قاعده انشعاب (اصل پایستگی بار الکتریکی):

۳ جریان کل عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری) در شکل زیر از رابطه زیر به دست می‌آید:



نیروی محرکه الکتریکی باتری (V)

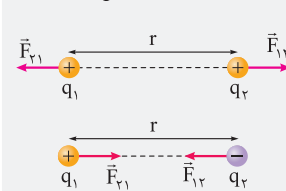
$$I = \frac{\epsilon}{R_{eq} + r}$$

مقاومت درونی باتری (Ω)

مقاومت معادل خارجی (Ω)

درس نامه ۱ دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 که در فاصله r از یکدیگر قرار دارند، به هم نیروی الکتریکی‌ای وارد می‌کنند که اندازه آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2} \quad (k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2} \text{ ثابت کولن})$$



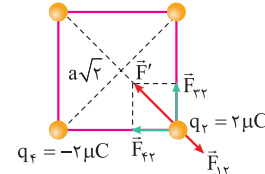
۲ مطابق شکل مقابل، بارهای همنام یکدیگر را دفع و بارهای ناهمنام یکدیگر را جذب می‌کنند.

نکته چون در بیشتر تست‌های این مبحث بارها را برحسب میکروکولن و فاصله‌ها را برحسب سانتی‌متر می‌دهند، می‌توانید در رابطه بالا کمیت‌ها را با همین یکاها جای‌گذاری کرده و به جای k ، 9×10^9 را قرار دهید تا F برحسب نیوتون به دست آید.

$$F = 9 \times 10^9 \times \frac{|q_1| |q_2|}{r^2} \quad (\text{تکنیک محاسباتی } 9 \times 10^9)$$

برحسب μC
برحسب cm
برحسب N

گام ۱ برای آن که میدان الکتریکی خالص در مرکز مربع صفر شود، باید مانند شکل روبه‌رو بارهای مشابه و هم‌نام در رأس‌های مقابل هم قرار گیرند.



گام ۲ نیروهای وارد بر یکی از بارها (در این جا q_2) را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$F_{22} = F_{21} = k \frac{|q_1| |q_2|}{a^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{2 \times 2}{3^2} = 0.4 \text{ N}$$

$$F_{12} = k \frac{|q_1| |q_2|}{(a\sqrt{2})^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{2 \times 2}{(3^2) \times 2} = 0.2 \text{ N}$$

گام ۳ برآیند دو نیروی عمود بر هم $\vec{F}_{21}$ و $\vec{F}_{22}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F' = \sqrt{F_{21}^2 + F_{22}^2} = \sqrt{F_{21}^2 + F_{22}^2} = \sqrt{0.4^2 + 0.2^2} = 0.447 \text{ N}$$

نیروهای $\vec{F}_{12}$ و $\vec{F}_{32}$ در خلاف جهت هم هستند، پس نیروی خالص وارد بر بار q_2 برابر می‌شود با:

$$F_2 = F' - F_{32} = 0.447 - 0.2 = 0.247 \text{ N}$$



۶۰- گزینه ۲

گام ۱ در حالت اول، اگر نیرویی را که بار q_1 به بار q_2 وارد می‌کند، بنامیم، نیرویی که بار q_3 به بار q_2 وارد می‌کند، برابر $\delta \vec{F}_{12}$ می‌شود. چون فاصله بارهای q_1 تا بار q_2 یکسان است، طبق قانون کولن داریم:

$$\vec{F}_{22} = \delta \vec{F}_{12}$$

$$\frac{F_{22}}{F_{12}} = \frac{|q_3| |q_2|}{|q_1| |q_2|} \times \left(\frac{r_{12}}{r_{22}}\right)^2 = \frac{\delta |q_1|}{|q_1|} \times 1 = \delta \Rightarrow F_{22} = \delta F_{12}$$

توی شکل بالا فرض کردیم بارهای q_1 و q_2 همنام و در نتیجه بارهای q_2 و q_3 ناهمنام‌اند.

نیروی خالص وارد بر بار q_2 در این حالت برابر می‌شود با:

$$F_2 = F_{12} + \delta F_{12} = 6F_{12}$$

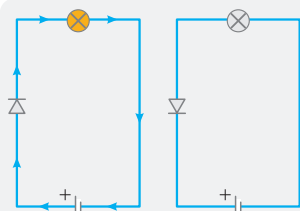
گام ۲ حالا بار q_3 را $\frac{4r}{\delta}$ به بار q_2 نزدیک می‌کنیم، یعنی فاصله بار q_3 تا بار q_2 به $\frac{r}{\delta}$ می‌رسد. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{F'_{22}}{F_{22}} = \left(\frac{r_{22}}{r'_{22}}\right)^2 = \left(\frac{r}{\frac{r}{\delta}}\right)^2 = \delta^2 \Rightarrow F'_{22} = \delta^2 F_{22} = \delta^2 \times \delta F_{12} = 12\delta F_{12}$$

نیروی خالص وارد بر بار q_2 در حالت دوم را هم به دست می‌آوریم:

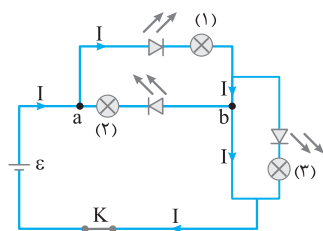
$$F'_2 = F_{12} + F'_{22} = F_{12} + 12\delta F_{12} = 126F_{12}$$

۶۳- گزینه ۱



درس نامه دیود، قطعه‌ای است که هرگاه در مداری قرار گیرد، جریان را تنها از یکسو عبور می‌دهد و مقاومت آن در برابر عبور جریان در این سو ناچیز است.

دیود را با نماد ∇ در مدارهای الکتریکی نشان می‌دهند. پیکان در این نماد جهت را نشان می‌دهد که جریان می‌تواند از دیود عبور کند. مثلاً مدارهای ساده شکل بالا نشان می‌دهد که با تعویض جهت دیود، جریان از مدار عبور نمی‌کند و لامپ خاموش می‌شود.



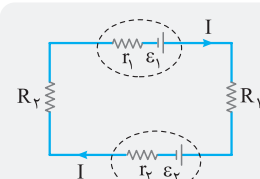
مطابق شکل مقابل، با بستن کلید، جریان در جهت نشان داده شده در مدار روبه‌رو برقرار می‌شود.

جهت جریان برخلاف جهت مجاز برای عبور از دیود شاخه لامپ (۲) است؛ بنابراین از این شاخه جریانی عبور نمی‌کند و لامپ (۲) خاموش می‌ماند و کل جریان مدار از شاخه لامپ (۱) عبور کرده و این لامپ روشن می‌شود. دو سر شاخه لامپ (۳) با یک سیم (بدون مقاومت) به یکدیگر متصل است؛ بنابراین این شاخه اتصال کوتاه شده و جریانی از آن عبور نمی‌کند و لامپ (۳) نیز خاموش می‌ماند.

مواستون باشه! چون پتانسیل نقطه a از پتانسیل نقطه b بیشتره، جریان مدار هنگام عبور از گره b به شافه لامپ (۲) وارد نمی‌شه!

تله اگر به اتصال کوتاه شدن لامپ (۳) و دیود مجاور آن توجه نکنید، به اشتباه (۳) را جواب درست در نظر خواهید گرفت.

۶۴- گزینه ۱



درس نامه مدار شکل روبه‌رو، شامل دو باتری $\mathcal{E}_1$ و $\mathcal{E}_2$ است که در جهت‌های مخالف بسته شده‌اند. در مورد این مدار باید موارد زیر را بدانید:

♦ تعیین جهت جریان عبوری از مدار به عهده باتری $\mathcal{E}_1$ (که نیروی محرکه الکتریکی بزرگ‌تری دارد) است.

♦ مقدار جریان عبوری از مدار برابر است با:

♦ باتری $\mathcal{E}_1$ تولیدکننده انرژی است: $V_1 = \mathcal{E}_1 - r_1 I$ اختلاف پتانسیل دو سر باتری $\mathcal{E}_1$

♦ باتری $\mathcal{E}_2$ مصرف‌کننده انرژی است: $V_2 = \mathcal{E}_2 + r_2 I$ اختلاف پتانسیل دو سر باتری $\mathcal{E}_2$

♦ توان تولیدی باتری $\mathcal{E}_1$: $P_{\mathcal{E}_1} = V_1 I = \mathcal{E}_1 I - r_1 I^2$

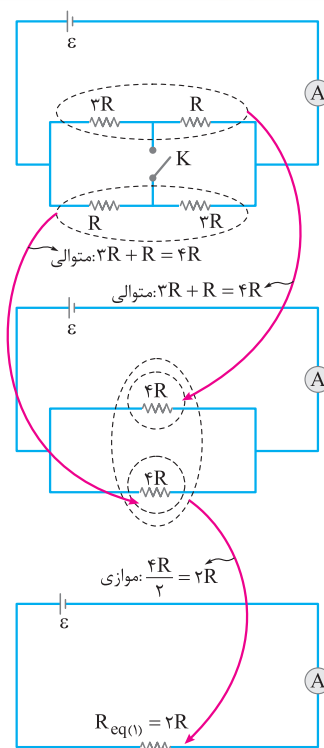
♦ توان مصرفی باتری $\mathcal{E}_2$: $P_{\mathcal{E}_2} = V_2 I = \mathcal{E}_2 I + r_2 I^2$

گام ۱ با کاهش مقاومت R، جریان عبوری از مدار طبق رابطه $I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2}$ افزایش می‌یابد.

گام ۲ با توجه به این که $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$ است، باتری $\mathcal{E}_1$ تولیدکننده انرژی است و اختلاف پتانسیل دو سر آن از رابطه $V_1 = \mathcal{E}_1 - r_1 I$ به دست می‌آید. از این رابطه مشخص است که با افزایش جریان، V_1 کاهش می‌یابد.

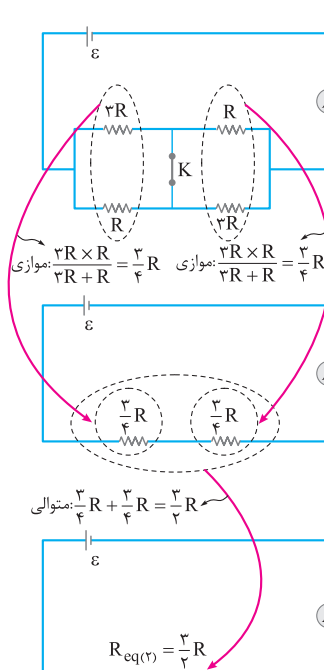
گام ۳ باتری $\mathcal{E}_2$ مصرف‌کننده انرژی است و توان ورودی به آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

با توجه به رابطه به دست آمده، با افزایش P_2 ، I نیز افزایش می‌یابد.



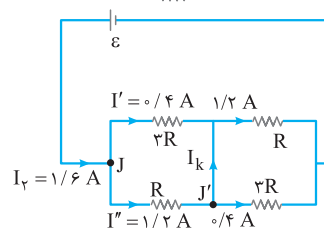
گام ۱ آمپرسنج جریان کل عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری) را نشان می‌دهد. با توجه به شکل‌های روبه‌رو، برای حالت اول که کلید باز است، ابتدا مقاومت معادل مدار و سپس جریان عبوری از باتری را محاسبه می‌کنیم:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq(1)}} \Rightarrow 1/2 = \frac{\mathcal{E}}{2R} \Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{R} = 2/4 \quad (1)$$



گام ۲ مطابق شکل‌های مقابل، برای حالت دوم که کلید بسته است، می‌توان نوشت:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq(2)}} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{2}{3}R} = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{E}}{R} \xrightarrow{(1)} I_2 = \frac{3}{2} \times 2/4 = 1/6 \text{ A}$$



گام ۳ حالا جریان عبوری از هر یک از مقاومت‌ها را در حالت دوم به دست می‌آوریم:

$$R \text{ و } 3R \Rightarrow \frac{3R}{R} = \frac{I'}{I} \Rightarrow I' = 3I'$$

$$I_2 = I' + I'' = I' + 3I' \Rightarrow 1/6 = 4I' \Rightarrow \begin{cases} I' = 0/4 \text{ A} \\ I'' = 1/2 \text{ A} \end{cases}$$

به همین ترتیب از مقاومت‌های R و 3R دیگر نیز جریان 1/2 A و 0/4 A می‌گذرد. حالا با توجه به شکل و با نوشتن قاعده انشعاب برای گره J'، جریان عبوری از سیم شامل کلید به دست می‌آید:

$$I'' = I_k + 0/4 \Rightarrow 1/2 = I_k + 0/4 \Rightarrow I_k = 0/8 \text{ A}$$



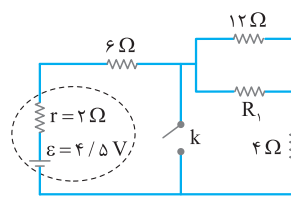
۶۵- گزینه ۳

گام ۱

مقاومت معادل و جریان کل عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری) را برای دو حالت به دست می‌آوریم:

حالت اول (کلید باز):

$$R' = \frac{12R_1}{12 + R_1} \Rightarrow R_1 \text{ و } 12 \Omega \text{ موازی‌اند.}$$

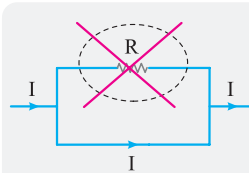


$$R_{eq(1)} = \frac{12R_1}{12 + R_1} + 4 + 6 (\Omega) \Rightarrow R' = 6 \Omega \text{ و } 4 \Omega \text{ و } 6 \Omega \text{ متوالی‌اند.}$$

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_{eq(1)} + r} = \frac{4/5}{\frac{12R_1}{12 + R_1} + 10 + 2} (A)$$

حالت دوم (کلید بسته):

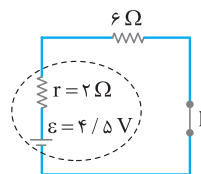
نکته مطابق شکل زیر، اگر دو سر یک مقاومت با سیم (بدون مقاومت) به یکدیگر متصل شود، از این مقاومت جریانی عبور نمی‌کند و این مقاومت اصطلاحاً اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شود. در این حالت همهٔ جریان ورودی به گره، از سیم عبور خواهد کرد.



در این حالت مجموعهٔ مقاومت‌های 4Ω و 12Ω اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شوند؛ بنابراین:

$$R_{eq(2)} = 6 \Omega$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R_{eq(2)} + r} = \frac{4/5}{6 + 2} = \frac{4/5}{8} (A)$$



گام ۲ جریان عبوری از مقاومت ۶ اهمی همان جریان کل عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری) است؛ بنابراین دو برابر شدن اختلاف پتانسیل دو سر آن به معنای دو برابر شدن جریان کل عبوری از مدار است، پس داریم:

$$I_2 = 2I_1 \Rightarrow \frac{4/5}{8} = 2 \times \frac{4/5}{\frac{12R_1}{12 + R_1} + 12} \Rightarrow 16 = \frac{12R_1}{12 + R_1} + 12$$

$$\Rightarrow \frac{12R_1}{12 + R_1} = 4 \Rightarrow 12R_1 = 48 + 4R_1 \Rightarrow 8R_1 = 48 \Rightarrow R_1 = 6 \Omega$$

۶۶- گزینه ۱

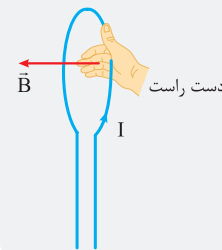
درس‌نامه ۱

اندازهٔ میدان مغناطیسی در مرکز حلقهٔ حامل جریان:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \rightarrow \text{شعاع حلقه}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T.m}{A} \rightarrow \text{تراوایی مغناطیسی خلأ}$$

۲ جهت میدان مغناطیسی در مرکز حلقهٔ حامل جریان: اگر مطابق شکل روبه‌رو شست دست راست را در جهت جریان عبوری از حلقه قرار دهیم، جهت خم شدن چهار انگشت دیگر، جهت میدان مغناطیسی در داخل حلقه را نشان می‌دهد.



گام ۳ بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز هر یک از حلقه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} R_1 = 2/5 \text{ cm} \\ I_1 = 20 \text{ A} \end{cases} \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20}{2 \times 2/5 \times 10^{-2}} = 1/6\pi \times 10^{-4} \text{ T}$$

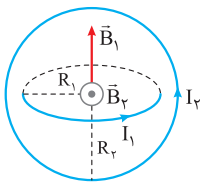
$$10^{-4} \text{ T} = 1 \text{ G} \rightarrow B_1 = 1/6\pi \text{ G}$$

$$\begin{cases} R_2 = 3 \text{ cm} \\ I_2 = 18 \text{ A} \end{cases} \Rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2R_2} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 18}{2 \times 3 \times 10^{-2}} = 1/2\pi \times 10^{-4} \text{ T}$$

$$10^{-4} \text{ T} = 1 \text{ G} \rightarrow B_2 = 1/2\pi \text{ G}$$

گام ۴

نکته میدان مغناطیسی در نقطه‌های روی محور حلقه، موازی محور است.



حلقه‌ها هم‌مرکزند و سطح آن‌ها بر یکدیگر عمود است؛ بنابراین مطابق شکل مقابل بردارهای $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ نیز بر هم عمود خواهند بود.

تیزبازی در حالتی که $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ هم‌جهت باشند، $\vec{B}_T$ حداکثر اندازهٔ ممکن را دارد که برابر است با:

حالا که $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ بر هم عمودند، اندازهٔ $\vec{B}_T$ حتماً کمتر از $2/8\pi \text{ G}$ است، پس ① جواب تست است.

بنابراین برآیند آن‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$B_T = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{(1/6\pi)^2 + (1/2\pi)^2} = \pi\sqrt{1/6^2 + 1/2^2} = \pi\sqrt{2/56 + 1/44} = 2\pi \text{ G}$$

تیزبازی B_T را می‌توانیم با توجه به الگوی اعداد فیثاغورسی $3k, 4k, 5k$ و Δk نیز به دست آوریم:

$$\begin{cases} B_1 = 1/6\pi = (4 \times 0/4)\pi \\ B_2 = 1/2\pi = (3 \times 0/4)\pi \end{cases} \Rightarrow B_T = (5 \times 0/4)\pi = 2\pi$$

۶۷- گزینه ۱

شفاف‌سازی بدون انحراف به حرکت خود ادامه دهد: نیروهای الکتریکی و مغناطیسی هم‌اندازه و در خلاف جهت یکدیگر باشند.

درس‌نامه ۱ ذره‌ای با بار q در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ قرار دارد:

① اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر این ذره: $F = E|q|$
② جهت نیروی الکتریکی وارد بر این ذره:

علامت بار ذره	جهت نیروی الکتریکی وارد بر ذره
مثبت	هم‌جهت با میدان الکتریکی
منفی	در خلاف جهت میدان الکتریکی

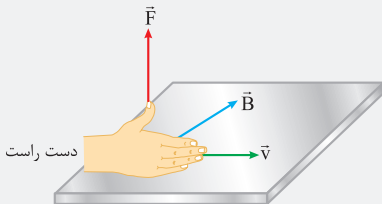
۲ ذره‌ای با بار q در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ در حال حرکت با سرعت $\vec{v}$ است:

① اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره: $F = |q| v B \sin \theta$

در رابطه بالا θ زاویهٔ بین جهت حرکت بار الکتریکی (بردار $\vec{v}$) و جهت میدان مغناطیسی (بردار $\vec{B}$) است.

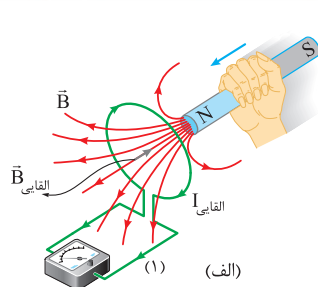
② جهت نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره: به کمک قاعدهٔ دست راست تعیین می‌شود.

طبق این قاعده، اگر چهار انگشت دست راست را طوری در جهت بردار سرعت ذره ($\vec{v}$) قرار دهیم که وقتی آن‌ها را خم می‌کنیم در جهت بردار میدان مغناطیسی ($\vec{B}$) قرار بگیرد، آن‌گاه انگشت شست دست جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره با بار مثبت را نشان می‌دهد (شکل مقابل را ببینید).



نکته اگر بار ذره منفی باشد، این قاعده را با دست چپ اجرا می‌کنیم.

علامت بار ذره	جهت نیروی الکتریکی وارد بر ذره
مثبت	قاعدهٔ دست راست
منفی	قاعدهٔ دست راست را با دست چپ اجرا می‌کنیم.

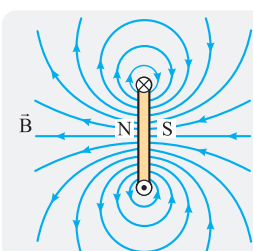


روش گام ۱ (الف)، آهنربا در حال نزدیک شدن به حلقه است؛ بنابراین با توجه به بیشتر بودن تراکم خطوط در نزدیکی قطب‌ها، میدان مغناطیسی در محل حلقه و در نتیجه شار مغناطیسی عبوری از آن در حال افزایش است. طبق قانون لنز، جهت میدان مغناطیسی القایی در خلاف جهت میدان مغناطیسی اصلی خواهد بود و به کمک قاعده دست راست، جریان القایی در جهت (۱) تعیین می‌شود.

گام ۲ طبق قانون لنز، حلقه می‌خواهد با افزایش شار مغناطیسی عبوری از خود مخالفت کند؛ بنابراین با وارد کردن نیروی دافعه به آهنربا، با نزدیک شدن آهنربا مخالفت می‌کند.

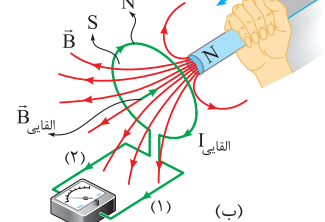
روش گام ۱ با نزدیک شدن آهنربا به حلقه، شار مغناطیسی عبوری از حلقه در حال افزایش است؛ بنابراین حلقه برای مخالفت با این افزایش شار باید مانع نزدیک شدن آهنربا شود و در نتیجه به آن نیروی دافعه وارد می‌کند.

گام ۲



نکته جهت میدان مغناطیسی در داخل حلقه حامل جریان از قطب S به قطب N حلقه است.

برای این که حلقه به آهنربا نیروی دافعه وارد کند، باید مطابق شکل (ب) پشت حلقه قطب N و جلوی حلقه قطب S باشد.



در این حالت، بردار میدان مغناطیسی القایی در داخل حلقه از قطب S به قطب N یعنی به طرف پشت حلقه است. به کمک قاعده دست راست، جریان القایی در این حالت در جهت (۱) است.

تله در تست‌های مربوط به تشخیص جهت جریان القایی، هر اشتباهی در تشخیص چگونگی تغییر شار یا استفاده از دست نادرست برای تشخیص جهت جریان القایی به راحتی شما را در تله گزینه‌های نادرست می‌اندازد.

گزینه ۳ ۷۰-

گام ۱ انرژی جنبشی شهاب‌سنگ در لحظه برخورد به زمین برابر است با:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^4 \times (8 \times 10^3)^2 = 2 \times 10^3 \times 32 \times 10^6 \text{ J}$$

گام ۲ جرم TNT به صورت زیر به دست می‌آید:

$$M = \frac{K}{\text{TNT}} = \frac{2 \times 10^3 \times 32 \times 10^6}{4 \times 10^9} = 160 \text{ تن}$$

مشاوره این تست جزء تمرین‌های آخر فصل کار، انرژی و توان است. تکتک تمرین‌ها، پرسش‌ها، مثال‌ها و... این فصل را جدی بگیرید. در اغلب کنکورهای اخیر، از روی این‌ها عیناً تست آمده است.

گزینه ۴ ۷۱-

درس‌نامه ۱ انرژی جنبشی جسمی به جرم m و تندی v، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

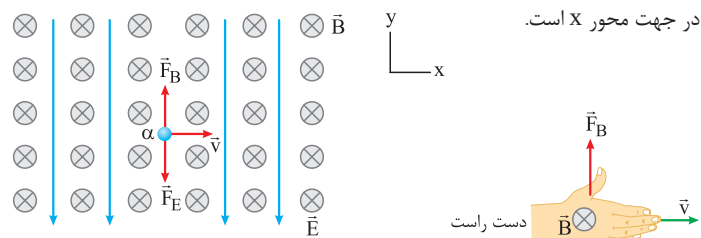
۲ کار نیروی وزن جسم برابر با منفی تغییر انرژی پتانسیل گرانشی جسم است:

$$W_{mg} = -\Delta U = -mg\Delta h$$

در رابطه بالا، اگر جسم از سطح زمین دور شود، $\Delta h > 0$ و اگر جسم به سطح زمین نزدیک شود،

گام ۱ برای این که ذره α منحرف نشود، نیروی مغناطیسی و نیروی الکتریکی وارد بر آن باید هم‌اندازه و در خلاف جهت یکدیگر باشند تا یکدیگر را خنثی کنند.

چون بار ذره α مثبت است، مطابق شکل زیر، نیروی الکتریکی وارد بر آن $(\vec{F}_E)$ هم‌جهت با $\vec{E}$ یعنی به سوی پایین است. پس نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره $(\vec{F}_B)$ باید به طرف بالا باشد. در این حالت به کمک قاعده دست راست جهت بردار سرعت (جهت حرکت) ذره در جهت محور x است.



گام ۲ $F_E = F_B \Rightarrow |q|E = |q|vB \sin \theta$ را برابر قرار می‌دهیم:

$$\theta = 90^\circ \rightarrow E = vB \Rightarrow 1000 = v \times 1000 \times 10^{-4} \Rightarrow v = 10^4 \text{ m/s}$$

تله اگر برای تعیین جهت حرکت ذره، به جای دست راست از دست چپتان استفاده کنید، در تله گزینه نادرست می‌افتید.

گزینه ۲ ۶۸-

درس‌نامه ۱ اندازه میدان مغناطیسی در داخل سیم‌لوله: تعداد حلقه‌های سیم‌لوله

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell} \rightarrow \begin{matrix} \uparrow \\ \text{جریان عبوری از سیم‌لوله} \\ \text{طول سیم‌لوله} \end{matrix}$$

۲ ضریب القاوری سیم‌لوله آرمانی و بدون هسته:

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} \rightarrow \begin{matrix} \uparrow \\ \text{تعداد حلقه‌های سیم‌لوله} \\ \text{سطح مقطع سیم‌لوله} \\ \text{طول سیم‌لوله} \end{matrix} \quad A = \pi r^2 \rightarrow \begin{matrix} \downarrow \\ \text{شعاع مقطع سیم‌لوله} \end{matrix}$$

گام ۱ نسبت بزرگی میدان مغناطیسی دو سیم‌لوله را به دست می‌آوریم:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell} \xrightarrow{\text{یکسان:}} \frac{B_A}{B_B} = \frac{N_A}{N_B} \times \frac{\ell_B}{\ell_A} \xrightarrow{\frac{\ell_A = 2\ell_B}{N_A = 2N_B}} \frac{B_A}{B_B} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

گام ۲ نسبت ضریب القاوری دو سیم‌لوله برابر است با:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} \xrightarrow{\text{یکسان:}} \frac{L_A}{L_B} = \left(\frac{N_A}{N_B}\right)^2 \times \frac{\ell_B}{\ell_A} = (2)^2 \times \frac{1}{2} = 2$$

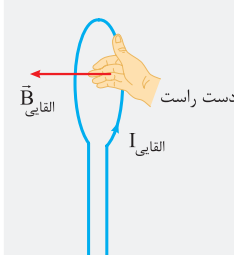
گزینه ۲ ۶۹-

درس‌نامه ۱ قانون لنز: با تغییر شار مغناطیسی عبوری از یک حلقه (یا پیچه یا سیم‌لوله)، میدان مغناطیسی القایی در داخل حلقه به وجود می‌آید که جهت آن طبق جدول زیر تعیین می‌شود:

جهت میدان مغناطیسی القایی	چگونگی تغییر شار مغناطیسی
در خلاف جهت میدان مغناطیسی اصلی	افزایش
هم‌جهت با میدان مغناطیسی اصلی	کاهش

۲ قاعده دست راست برای تعیین جهت جریان القایی:

اگر چهار انگشت دست راست را در جهت میدان مغناطیسی در داخل حلقه قرار دهیم، شست دست جهت جریان القایی در حلقه را نشان می‌دهد (شکل روبه‌رو).





گام ۴ از آن جا که تعداد مول ها و دمای هوای محبوس درون لوله ثابت است، برای محاسبه فاصله انتهای لوله از سطح جیوه (h_p در شکل ب) به سراغ رابطه نسبتی گازها می‌رویم:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \xrightarrow[A: ثابت]{V=Ah} P_1 h_1 = P_2 h_2$$

$$\Rightarrow \frac{92}{37 \times 2/5} \times 12 = \frac{75}{30 \times 2/5} \times h_p \Rightarrow h_p = \frac{37 \times 12}{30} = 14.8 \text{ cm}$$

تله اگر به جای محاسبه فاصله انتهای لوله از سطح جیوه در حالت دوم، جابه‌جایی لوله را نسبت به حالت اول حساب می‌کردید، به عدد $20/3 \text{ cm}$ می‌رسیدید، و به اشتباه ψ را انتخاب می‌کردید!

۷۴- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ شکل نسبتی معادله حالت برای دو گاز کامل به صورت زیر است:

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2}$$

در این رابطه، P ها فشار مطلق گازها هستند (نه فشار پیمانه‌ای).

در این رابطه، T ها حتماً باید برحسب کلوین (نه سلسیوس و نه فارنهایت) باشند، اما در مورد بقیه کمیت‌ها، فقط یکسان بودن یکاها در دو طرف معادله مهم است.

$T = 273 + \theta$

رابطه بین مقیاس‌های دمای کلوین و سلسیوس:

رابطه بین تعداد مول گاز و جرم گاز به صورت زیر است:

$$n = \frac{m}{M}$$

جرم مولی گاز

گام ۴ از آن جا که اصطکاک پیستون ناچیز است، فشار گاز دو طرف آن باید برابر باشد. با این حساب با نوشتن شکل نسبتی معادله حالت، نسبت تعداد مول گاز نیتروژن به هیدروژن را حساب می‌کنیم:

$$\frac{P_{H_2} V_{H_2}}{n_{H_2} T_{H_2}} = \frac{P_{N_2} V_{N_2}}{n_{N_2} T_{N_2}} \xrightarrow[V=Ah]{P_{H_2}=P_{N_2}} \frac{h_{H_2}}{n_{H_2} T_{H_2}} = \frac{h_{N_2}}{n_{N_2} T_{N_2}} \Rightarrow \frac{21}{n_{H_2} \times (273+27)} = \frac{32}{n_{N_2} \times (273+47)} \Rightarrow \frac{n_{N_2}}{n_{H_2}} = \frac{32 \times 300}{37 \times 21} = \frac{10}{7}$$

گام ۴ حالا نسبت جرم گاز نیتروژن به جرم گاز هیدروژن را به دست می‌آوریم:

$$m = nM \Rightarrow \frac{m_{N_2}}{m_{H_2}} = \frac{n_{N_2}}{n_{H_2}} \times \frac{M_{N_2}}{M_{H_2}} = \frac{10}{7} \times \frac{28}{2} = 20$$

۷۵- گزینه ۳

استراتژی برای حل تست‌های مربوط به چرخه ترمودینامیکی:

۱ چرخه ΔU که برابر با مجموع ΔU فرایندها است را برابر صفر قرار دهید. با توجه به ویژگی فرایندها، برخی کمیت‌های موجود در معادله صفر می‌شود (برای مثال در فرایند هم‌حجم $W = 0$ و در فرایند بی‌دررو $Q = 0$ است). به کمک داده‌های تست، معادله را حل کرده و خواسته تست را به دست آورید.

درس‌نامه ۱ قانون اول ترمودینامیک:

گرمايي که تغییرات انرژی گاز می‌گیرد درونی گاز

$$\Delta U = Q + W$$

کاری که محیط روی گاز انجام می‌دهد

۲ در فرایند هم‌حجم ($\Delta V = 0$) کار مبادله‌شده بین گاز و محیط برابر صفر است.

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{W=0} \Delta U = Q$$

۳ در فرایند هم‌دما ($\Delta T = 0$)، چون تغییر دما نداریم، تغییرات انرژی درونی گاز برابر صفر است؛ بنابراین:

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{\Delta U=0} Q = -W$$

$\Delta h < 0$ است. ۳ قضیه کار - انرژی جنبشی: کار کل انجام‌شده روی یک جسم با تغییر انرژی جنبشی آن برابر است:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_t = K_p - K_i$$

توجه داشته باشید که:

♦ رابطه بالا برای هر نوع مسیری برقرار است.

♦ انرژی جنبشی در آغاز و پایان مسیر مهم است و این که در طول مسیر انرژی جنبشی چگونه تغییر کرده، اهمیتی ندارد.

دو نیرو روی گلوله کار انجام می‌دهد: ۱- نیروی شخص ($\vec{F}$) و ۲- نیروی وزن ($m\vec{g}$).

به کمک قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_F + W_{mg} = K_p - K_i$$

$$\xrightarrow{K_i=0} W_F + (-mg\Delta h) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow W_F - 150 \times 10^{-3} \times 10 \times 1/8 = \frac{1}{2} \times 150 \times 10^{-3} \times (12)^2$$

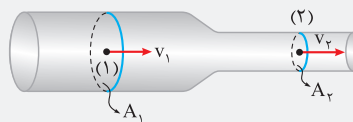
$$\Rightarrow W_F = 150 \times 10^{-3} \times (72 + 18) = 13.5 \text{ J}$$

تله علامت کار (مثلاً کار نیروی وزن)، گاهی اوقات سوژه تله‌گذاری در گزینه‌ها می‌شود. اگر در این تست، علامت کار نیروی وزن را به اشتباه مثبت در نظر بگیرید، به جواب نادرست ψ خواهید رسید.

۷۲- گزینه ۴

درس‌نامه معادله پیوستگی: اگر مطابق شکل زیر، شاره تراکم‌ناپذیری همه جای لوله را پر کرده باشد و درون لوله با جریان لایه‌ای در حال حرکت باشد، در حالت پایا آهنگ شارش حجمی شاره از همه مقاطع لوله یکسان است. به زبان ریاضی:

(A: مساحت مقطع لوله و v: تندی شاره)



(معادله پیوستگی)

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

از آن جا که سیال (شاره) تراکم‌ناپذیر است و تمام حجم لوله را پر کرده است، طبق معادله پیوستگی، آهنگ شارش سیال در هر مقطع دلخواهی یکسان است؛ بنابراین:

$$(Av)_A = (Av)_B \Rightarrow \frac{(Av)_A}{(Av)_B} = 1$$

مشاوره نسبت شعاع مقطع‌ها اطلاعات اضافی بود تا شما را گمراه کند. حواستان باشد که قرار نیست همیشه از تمام اطلاعات داده‌شده در سؤال استفاده کنید!

۷۳- گزینه ۱

شفاف‌سازی جیوه درون ظرف و لوله در یک سطح قرار گیرند: فشار گاز درون لوله برابر با فشار هوا شود.

درس‌نامه ۱ اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز: در نقطه‌های هم‌تراز (هم‌عمق) یک مایع ساکن، فشار یکسان است و به شکل ظرف بستگی ندارد. ۲ شکل نسبتی معادله حالت گاز کامل، وقتی دما (T) و مقدار گاز یعنی جرم یا تعداد مول گاز (n) ثابت بماند:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2$$

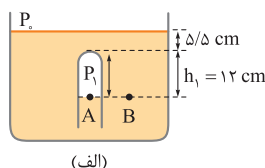
♦ در این رابطه P ها فشار مطلق گاز هستند (نه فشار پیمانه‌ای).

گام ۴ به کمک اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز، فشار هوای محبوس درون لوله را در حالت اول (شکل الف) و در حالت دوم (شکل ب) حساب می‌کنیم. (از آن جایی که مایع درون ظرف

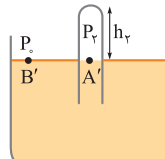
جیوه است و فشار هوا هم برحسب سانتی‌متر جیوه داده شده، محاسبات را با سانتی‌متر جیوه انجام می‌دهیم).

حالت اول: $P_A = P_B \Rightarrow P_1(\text{cmHg}) = P_0(\text{cmHg}) + 5/5 + 12 \Rightarrow P_1(\text{cmHg}) = 75 + 5/5 + 12 = 92/5 \text{ cmHg}$

حالت دوم: $P_{A'} = P_{B'} \Rightarrow P_2(\text{cmHg}) = P_0$

$$\Rightarrow P_2(\text{cmHg}) = 75 \text{ cmHg}$$


(الف)



(ب)

۷۷- گزینه ۲

عبارت‌های (ب) و (پ) درست‌اند.

(آ) ایزوتوپ‌ها دارای عدد اتمی یکسان و عدد جرمی متفاوت هستند؛ بنابراین اتم‌های ${}^{60}_{27}M$ و ${}^{68}_{28}A$ ، ایزوتوپ یکدیگر به حساب نمی‌آیند.

(ب) در اتم ${}^{60}_{27}M$ ، پروتون و نوترون $(33 - 27 = 6)$ وجود دارد: $33 - 27 = 6$
(پ) در اتم ${}^{60}_{27}M$ ، ۸ الکترون با $l = 0$ (زیرلایه‌های s) و ۱۲ الکترون با $l = 1$ (زیرلایه‌های p) وجود دارد: $12 + 8 = 20$

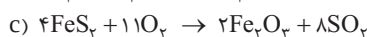
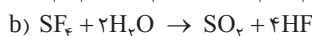
${}^{60}_{27}M: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^5 4s^2$

(ت) در اتم ${}^{60}_{27}M$ ، ۷ الکترون در زیرلایه $3d$ و در اتم ${}^{60}_{28}X$ ، $([Ar] 3d^5 4s^1)$ ، ۵ الکترون در زیرلایه $3d$ وجود دارد: $7 - 5 = 2$

تیزبازی عبارت (آ) که *تابو غلطه!* بنابراین ① و ④ پُر عبارت‌های (ب) و (پ) هم بین ② و ③ یکسان‌اند؛ پس نیازی به بررسی‌شون نیست و فقط باید عبارت (ت) رو بررسی کنی و تمام!

۷۸- گزینه ۳

معادله موازنه‌شده واکنش‌های داده‌شده به صورت زیر است:



$$\frac{\text{مجموع ضرایب در واکنش (a)}}{\text{مجموع ضرایب در واکنش (c)}} = \frac{11}{25} \xrightarrow{\times \frac{4}{4}} \frac{44}{100} = 0.44$$

$$(d) - (b) = 11 - 8 = 3 \quad (\text{مجموع ضرایب در واکنش (b) - مجموع ضرایب در واکنش (d)})$$

۷۹- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ تعیین موقعیت عنصرها در جدول تناوبی به کمک آرایش الکترونی:

تعیین شماره گروه

اگر آرایش الکترونی به S ختم شود.

اگر آرایش الکترونی به p ختم شود.

$$12 + \left(\begin{array}{l} \text{الکترون‌های} \\ \text{آخرین زیرلایه } p \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{الکترون‌های آخرین زیرلایه } s \\ \text{زیرلایه } d \text{ ماقبل آخر (در صورت وجود)} \end{array} \right) + (\text{الکترون‌های})$$

تعیین شماره دوره (تناوب)

بزرگ‌ترین ضریب در آرایش الکترونی (بزرگ‌ترین عدد کوانتومی اصلی (n))

۲ تعیین شماره دوره و گروه عنصرها با استفاده از عدد اتمی گازهای نجیب

تعیین شماره دوره: کافی است عدد اتمی عنصر مورد نظر را بین عدد اتمی دو گاز نجیب قرار دهیم، شماره دوره عنصر با شماره دوره گاز نجیب بعد از آن یکسان است.

$$\text{عدد اتمی گازهای نجیب: } 2 \quad 10 \quad 18 \quad 36 \quad 54 \quad 86 \quad 118$$

دوره ۱ دوره ۲ دوره ۳ دوره ۴ دوره ۵ دوره ۶ دوره ۷ دوره ۸

تعیین شماره گروه: برای تعیین شماره گروه:

① اگر عدد اتمی عنصر مورد نظر یک یا دو واحد بیشتر از عدد اتمی یکی از گازهای نجیب باشد، شماره گروه عنصر به ترتیب برابر ۱ یا ۲ است:

$$1 = \text{شماره گروه عنصر } X \Rightarrow 19 - 18 = 1 \Rightarrow X: 19 \text{ مثال}$$

عدد اتمی Ar ۱۸

④ در فرایند هم‌فشار، علامت Q و W مخالف یکدیگر است.

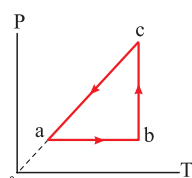
برای مثال فرض کنید در یک فرایند هم‌فشار، دمای گاز افزایش یابد؛ بنابراین:

$$P\Delta V = nR\Delta T \xrightarrow{\Delta T > 0} \Delta V > 0 \xrightarrow{W = -P\Delta V} W < 0$$

$$\Delta T > 0 \Rightarrow \Delta U > 0 \Rightarrow Q + W > 0 \xrightarrow{W < 0} Q > 0$$

علامت‌های Q و W مخالف یکدیگر است. $\Rightarrow$

⑤ در یک چرخه ترمودینامیکی، چون گاز پس از طی چند فرایند متوالی دوباره به حالت اولیه‌اش بازمی‌گردد، تغییرات انرژی درونی گاز برابر صفر است، یعنی: $\Delta U_{\text{چرخه}} = 0$



گام ۱ مطابق نمودار، امتداد نمودار فرایند Ca از

مبدأ مختصات نمودار (P-T) می‌گذرد؛ بنابراین این فرایند هم‌حجم است؛ در نتیجه:

$$W_{ca} = 0$$

هم‌چنین مطابق نمودار، فرایند bc هم‌دما است؛ در نتیجه:

$$\Delta U_{bc} = 0$$

گام ۲ حالا از آن‌جا که تغییرات انرژی درونی در یک چرخه برابر صفر است؛ قانون اول ترمودینامیک را برای چرخه می‌نویسیم تا بتوانیم به کمک اطلاعات داده‌شده، کار انجام‌شده روی گاز در فرایند ab را به دست آوریم:

$$\Delta U_{\text{چرخه}} = 0 \Rightarrow \Delta U_{ab} + \Delta U_{bc} + \Delta U_{ca} = 0$$

$$\Rightarrow Q_{ab} + W_{ab} + Q_{ca} + W_{ca} = 0 \xrightarrow{Q_{ca} = -300 \text{ J}} Q_{ab} + W_{ab} = 300 \quad (1)$$

با توجه به اطلاعات تست و آن‌چه در مورد (۴) درس‌نامه گفتیم:

$$Q_{ab} = -\frac{V}{2} W_{ab} \quad (2)$$

رابطه (۱) را در رابطه (۲) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$-\frac{V}{2} W_{ab} + W_{ab} = 300 \Rightarrow -\frac{5}{2} W_{ab} = 300 \Rightarrow W_{ab} = \frac{-2}{5} \times 300 = -120 \text{ J}$$

شیمی

۷۶- گزینه ۴

شفاف‌سازی فلز قلیایی خاکی یعنی فلز گروه دوم جدول تناوبی

نکته شمار الکترون‌های مبادله‌شده در تشکیل ترکیب‌های یونی را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

قدرمطلق بار آنیون $\times$ شمار آنیون = بارکاتیون $\times$ شمار کاتیون = شمار الکترون‌های مبادله‌شده

فرمول اکسید یک فلز قلیایی خاکی (فلز گروه دوم) به صورت MO است.

$$2 = 1 \times 2 = 2 \quad \text{بارکاتیون} \times \text{تعداد کاتیون} = \text{شمار الکترون‌های مبادله‌شده}$$

برای تولید هر مول اکسید، ۲ مول الکترون مبادله می‌شود. اگر جرم مولی فلز M را m گرم بر مول در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



روش ۱ استفاده از کسر تناسب

$$\frac{\text{جرم}}{\text{عدد آووگادرو} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{تعداد ذره}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$$

$$\Rightarrow \frac{60}{1 \times (m + 16)} = \frac{18 / 0.6 \times 10^{23}}{2 \times 6.02 \times 10^{23}} \Rightarrow m = 24 \text{ g.mol}^{-1}$$

روش ۲ استفاده از کسر تبدیل

$$18 / 0.6 \times 10^{23} e^- \times \frac{1 \text{ mole}^-}{6.02 \times 10^{23} e^-} \times \frac{1 \text{ mol MO}}{2 \text{ mole}^-} \times \frac{(m + 16) \text{ g MO}}{1 \text{ mol MO}} = 60 \text{ g MO}$$

$$m + 16 = 40 \Rightarrow m = 24 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$\frac{M}{\text{جرم اتمی O}} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} = 1.5$$



۸۲ - گزینه ۲

گام ۱ جرم مولی آلومینیم سولفات را حساب می‌کنیم:

$$Al_2(SO_4)_3 \text{ جرم مولی} = (2 \times 27) + 3(32 + 4(16)) = 342 \text{ g.mol}^{-1}$$

گام ۲ مول Al^{3+} را حساب می‌کنیم.

$$Al_2(SO_4)_3 \sim 2Al^{3+}$$

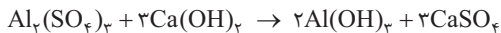
روش ۱ استفاده از کسر تناسب

$$\frac{\text{جرم مولی}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{1}{1 \times 342} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 0.1 \text{ mol } Al^{3+}$$

روش ۲ استفاده از کسر تبدیل

$$17/1 \text{ g } Al_2(SO_4)_3 \times \frac{1 \text{ mol } Al_2(SO_4)_3}{342 \text{ g } Al_2(SO_4)_3} \times \frac{2 \text{ mol } Al^{3+}}{1 \text{ mol } Al_2(SO_4)_3} = 0.1 \text{ mol } Al^{3+}$$

گام ۳ معادله واکنش را موازنه کرده و جرم رسوب را به دست می‌آوریم:



روش ۱ استفاده از کسر تناسب

$$\frac{\text{جرم مولی}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم مولی}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{1}{1 \times 342} = \frac{x}{2 \times 78} \Rightarrow x = 7/8 \text{ g } Al(OH)_3$$

روش ۲ استفاده از کسر تبدیل

$$17/1 \text{ g } Al_2(SO_4)_3 \times \frac{1 \text{ mol } Al_2(SO_4)_3}{342 \text{ g } Al_2(SO_4)_3} \times \frac{2 \text{ mol } Al(OH)_3}{1 \text{ mol } Al_2(SO_4)_3} \times \frac{78 \text{ g } Al(OH)_3}{1 \text{ mol } Al(OH)_3} = 7/8 \text{ g } Al(OH)_3$$

۸۳ - گزینه ۳

به‌جز عبارت اول، بقیه عبارت‌ها نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

هر دو ظرف دارای ۱۰ ذره هستند؛ بنابراین تعداد مول و مولکول گازها در دو ظرف، یکسان است.

$$\frac{c}{a} = \frac{10 \times 0.05 \times 6 / 0.2 \times 10^{23}}{10 \times 0.05} = 6 / 0.2 \times 10^{23}$$

هر ذره هم‌ارز ۰.۰۵ مول است؛ بنابراین در هر ظرف، ۰.۰۵ مول گاز وجود دارد:

$$0.05 \text{ mol} \times \frac{22.4 \text{ L}}{1 \text{ mol}} = 1.12 \text{ L}$$

گاز سبک‌تر، N_2 و گاز سنگین‌تر، CO_2 است:

$$\frac{N_2 \text{ جرم}}{CO_2 \text{ جرم}} = \frac{N_2 \text{ مول} \times N_2 \text{ جرم مولی}}{CO_2 \text{ مول} \times CO_2 \text{ جرم مولی}} = \frac{28}{44} = 0.64$$

در حجم برابر، نسبت غلظت مولی دو گاز با نسبت شمار مول‌های آن‌ها برابر است. در این‌جا تعداد مول گازها یکسان است؛ بنابراین غلظت مولی گازها برابر می‌باشد.

$$\frac{\text{شمار مول‌ها}}{\text{حجم}} = \text{غلظت مولی}$$

۸۴ - گزینه ۲

نکته غلظت محلول برحسب درصد جرمی و ppm از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$a = \text{درصد جرمی} \Rightarrow \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 100$$

$$\Rightarrow \frac{\text{محلول } 100 \text{ g}}{\text{حل‌شونده } a \text{ g}} \text{ یا } \frac{\text{حل‌شونده } a \text{ g}}{\text{محلول } 100 \text{ g}}: \text{کسر تبدیل‌های مربوط به درصد جرمی}$$

$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \Rightarrow \text{ppm} = b$$

$$\Rightarrow \frac{\text{محلول } 10^6 \text{ g}}{b \text{ g حل‌شونده}} \text{ یا } \frac{b \text{ g حل‌شونده}}{10^6 \text{ g محلول}}: \text{کسر تبدیل‌های مربوط به ppm}$$

۲ عنصرهایی که در دو ردیف در پایین جدول قرار دارند (عنصرهای ۵۷ تا ۷۰ و ۸۹ تا ۱۰۲ جدول) را می‌توان متعلق به گروه ۳ دانست.

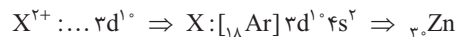
۳ برای بقیه عنصرها که عدد اتمی آن‌ها بیش از ۲ واحد از عدد اتمی گاز نجیب قبل از خود بیشتر است، باید اختلاف عدد اتمی عنصر و گاز نجیب هم‌دوره‌اش را از عدد ۱۸ کم کنیم:

$$11 = 18 - (54 - 47) = 18 - 7 = 11$$

عدد اتمی عنصر گاز نجیب هم‌دوره

عبارت‌های (پ) و (ت) درست‌اند.

بیابید اول تکلیف عنصرهای A و X را مشخص کنیم: $A: [10, \text{Ne}] 3s^2 3p^4 \Rightarrow {}_{16}\text{S}$



(آ) فلز X (روی) جزء فلزهای واسطه است و در دوره چهارم و گروه ۱۲ قرار دارد.

(ب) $30 - 16 = 14$

(پ) A و X به ترتیب یون‌های X^{2+} و A^{2-} تشکیل می‌دهند؛ بنابراین فرمول ترکیب یونی حاصل از آن‌ها به صورت XA است.

(ت) عنصر A (نافلز گوگرد) و عنصر D (مس)، هر دو در گروه ۱۶ قرار دارند، زیرا عدد اتمی آن‌ها ۲ واحد کمتر از گازهای نجیب ${}_{18}\text{Ar}$ و ${}_{36}\text{Kr}$ (عنصرهای گروه ۱۸) است.

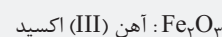
از طرفی عنصر A (۱۶) و E (۱۳)، هر دو در دوره سوم قرار دارند (عنصرهایی با عدهای اتمی ۱۱ تا ۱۸ در دوره سوم قرار دارند).

تیزبازی در آرایش الکترون‌های ظرفیت عنصر X، زیرلایه $3d$ وجود دارد؛ بنابراین

نمی‌تواند متعلق به گروه ۲ باشد (عنصرهای دسته d در گروه‌های ۳ تا ۱۲ قرار دارند)؛ پس عبارت (آ) غلط و (۱) و (۲) پُر؛ در (۳) و (۴) عبارت (پ) مشترک است و کافی است یکی از عبارت‌های (ب) یا (ت) را بررسی کنیم که در میان آن‌ها عبارت (ت) *آسون‌تره!* و *تو سه سوت* می‌شه فهمید درسته! و جواب (۴) است.

۸۰ - گزینه ۱

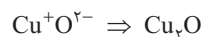
نکته در نام‌گذاری ترکیب‌های فلزهایی مانند آهن که بیش از یک نوع کاتیون با بار متفاوت دارند، بار کاتیون با اعداد رومی داخل پرانتز نشان داده می‌شود.



شما باید بدانید که چهار فلز آهن، مس، کروم و وانادیم بیش از یک کاتیون پایدار دارند:

V^{2+}, V^{3+} : وانادیم / Cr^{2+}, Cr^{3+} : کروم / Fe^{2+}, Fe^{3+} : آهن / Cu^{+}, Cu^{2+} : مس
مواستون باشه که استفاده از عدد رومی برای نام‌گذاری یون فلزهایی که فقط یک نوع کاتیون دارند، مرام است!

فرمول مس (I) اکسید به صورت Cu_2O است، یعنی مشابه با Ag_2O !



$$\frac{Cu_2O \text{ در } O \text{ جرم}}{Cu_2O \text{ در } Cu \text{ جرم}} = \frac{O \text{ مول} \times O \text{ جرم مولی}}{Cu \text{ مول} \times Cu \text{ جرم مولی}} = \frac{1 \times 16}{2 \times 64} = \frac{1}{8} = 0.125$$

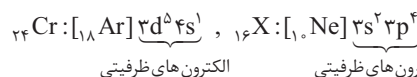
۸۱ - گزینه ۳

همه عبارت‌ها به‌جز عبارت آخر، درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عنصر مورد نظر همان ${}_{24}\text{Cr}$ است که اغلب به صورت کاتیون‌های Cr^{2+} و Cr^{3+} در ترکیب‌ها وجود دارد.

در هر دو عنصر ${}_{24}\text{Cr}$ و ${}_{16}\text{X}$ ۶ الکترون ظرفیت وجود دارد.



الکترون‌های ظرفیتی

با فرض جدا شدن ۶ الکترون از اتم مورد نظر، آرایش آن به گاز نجیب آرگون می‌رسد.

توجه: درسته که یون پایدار Cr^{6+} وجود خارجی نداره، اما این‌جا طراح فرض کرده که ۶ الکترون از اتم کروم جدا شود.

آرایش الکترونی اتم ${}_{25}\text{Z}$ به $3d^5 4s^2$ ختم می‌شود.



بررسی عبارت‌های نادرست،

(ب) در یک گروه با افزایش عدد اتمی (از بالا به پایین)، خصلت فلزی افزایش می‌یابد، اما در یک دوره با افزایش عدد اتمی (از چپ به راست)، خصلت فلزی کاهش می‌یابد.

در یک گروه، با افزایش شعاع اتمی در فلزها ← افزایش خصلت فلزی

در یک دوره، با کاهش شعاع اتمی در فلزها ← کاهش خصلت فلزی

(ت) قسمت اول این عبارت نادرست! زیرا هلیوم که در گروه ۱۸ (سمت راست جدول) قرار دارد، جزء عنصرهای دسته S است.



۸۷- گزینه ۲

درس‌نامه عوامل موثر بر انحلال‌پذیری گازها در آب

سه عامل «نوع گاز، دما و فشار» بر انحلال‌پذیری گازها در آب خالص مؤثرند.

۱- نوع گاز

گازهایی که مولکول‌های ناقطبی دارند، اغلب انحلال‌پذیری کمی در آب دارند. در ضمن هر چه جرم و حجم مولکول ناقطبی بیشتر باشد، انحلال‌پذیری آن در آب بیشتر است.

مثال: $O_2 > N_2 > H_2$: مقایسه انحلال‌پذیری سه گاز ناقطبی در آب

۲ ۲۸ ۳۲: جرم مولی ($g \cdot mol^{-1}$)

انحلال‌پذیری گازهایی که مولکول‌های قطبی دارند، معمولاً بیشتر از انحلال‌پذیری گازهای ناقطبی است؛ به طور مثال NO و O_2 جرم مولی نزدیک به هم دارند، اما انحلال‌پذیری گاز قطبی NO در آب بیشتر از گاز ناقطبی O_2 است.

برخی از اکسیدهای نافلزی، مانند CO_2 ، SO_2 و SO_3 می‌توانند با آب واکنش دهند؛ به همین دلیل انحلال‌پذیری به نسبت خوبی در آب دارند.

توجه: همواره انحلال‌پذیری گازهای قطبی بیشتر از گازهای ناقطبی نیست؛ به طور مثال هرچند گاز CO_2 مولکول‌های ناقطبی دارد، اما آزمایش‌ها نشان می‌دهد که در فشار یک اتمسفر و در هر دمایی، انحلال‌پذیری آن از گاز NO که مولکول‌های قطبی دارد، بیشتر است. دلیلش همین واکنش CO_2 با آب هست!

نتیجه: با هیزایی که فوندم، مقایسه انحلال‌پذیری چهار گاز NO ، CO_2 ، O_2 و N_2 در شرایط یکسان این‌طور یاست:

CO_2	NO	O_2	N_2
↓	↓	↓	↓
مولکول ناقطبی	مولکول ناقطبی	مولکول ناقطبی	مولکول ناقطبی
در آب	که با آب	با جرم مولی	کم‌تر
واکنش می‌دهد.	بیشتر		

۲- دما

انحلال‌پذیری گازها با دما رابطه عکس دارد؛ یعنی با افزایش دما، انحلال‌پذیری گازها در آب کاهش می‌یابد.

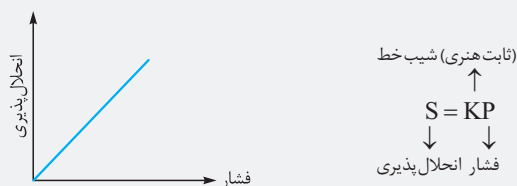
هواستون باشه! که نمودار انحلال‌پذیری گازها بر حسب دما به صورت منحنی (نه خطی!) است. بدانید و آگاه باشید! که انحلال گازها در آب، فرایندی گرماده است.

۳- فشار

مطابق قانون هنری، انحلال‌پذیری گازها با فشار رابطه مستقیم دارد؛ یعنی در دمای ثابت، با افزایش فشار، انحلال‌پذیری گازها افزایش می‌یابد.

نمودار انحلال‌پذیری گازها بر حسب فشار به صورت خطی با شیب ثابت است؛ پس می‌توان گفت با n برابر شدن فشار، انحلال‌پذیری گاز هم n برابر می‌شود.

معادله انحلال‌پذیری گازها بر حسب فشار را می‌توان به صورت زیر نشان داد:



با توجه به رابطه‌های گفته‌شده، بین ppm و درصد جرمی، رابطه زیر برقرار است:

$$ppm = 10^4 \times \text{درصد جرمی}$$

گام ۱: جرم ید در محلول را حساب می‌کنیم:

$$I_p = 2 / 52 \text{ g } I_p \times \frac{1 / 4 \text{ g } I_p}{100 \text{ g محلول}} = 180 \text{ g محلول}$$

گام ۲: جرم I_p را به مول آن تبدیل می‌کنیم:

$$I_p = 2 / 52 \text{ g } I_p \times \frac{1 \text{ mol } I_p}{254 \text{ g } I_p} = \frac{2}{254} \approx 0.01 \text{ mol } I_p$$

گام ۳: غلظت محلول بر حسب ppm را حساب می‌کنیم:

$$ppm = \frac{I_p \text{ جرم}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{2 / 52}{180} \times 10^6 = 14000$$

روش ۱

$$ppm = 10^4 \times \text{درصد جرمی} = 10^4 \times 1 / 4 = 14000$$

روش ۲



۸۵- گزینه ۲

استراتژی: ابتدا درصد جرمی محلول رو به انحلال‌پذیری آن تبدیل کن و سپس از روی نمودار، دماهای مرتبط با انحلال‌پذیری‌ها رو بخون!

نکته: رابطه بین انحلال‌پذیری و درصد جرمی محلول سیرشده:

اگر انحلال‌پذیری در دمای معین را برابر با S در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\text{جرم محلول سیرشده} = S + 100$$

$$\text{درصد جرمی محلول سیرشده} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 100$$

$$\Rightarrow \text{درصد جرمی محلول سیرشده} = \frac{S}{S + 100} \times 100$$

گام ۱: حساب می‌کنیم که در چه دمایی، درصد جرمی محلول سیرشده برابر با $37/5$ است:

$$\frac{S}{S + 100} \times 100 = 37.5 \Rightarrow \frac{S}{S + 100} = \frac{37.5}{100} \Rightarrow S = 60$$

$$\Rightarrow 3S + 300 = 8S \Rightarrow 5S = 300 \Rightarrow S = 60 \xrightarrow{\text{از روی نمودار}} a = 40^\circ C$$

گام ۲: حساب می‌کنیم که در چه دمایی، درصد جرمی محلول سیرشده برابر با $16/7$ است:

$$\frac{S}{S + 100} \times 100 = 16.7 \Rightarrow S = 20$$

$$\frac{S}{S + 100} \times 100 = 16.7 \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{S}{S + 100} \Rightarrow 6S = S + 100$$

$$\Rightarrow 5S = 100 \Rightarrow S = 20 \xrightarrow{\text{از روی نمودار}} b = 10^\circ C$$

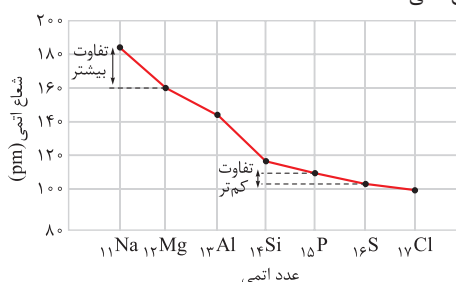
$$a - b = 40 - 10 = 30^\circ C$$

گام ۳: تفاوت دماهای a و b را حساب می‌کنیم:



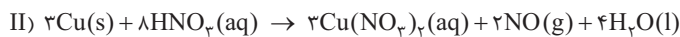
۸۶- گزینه ۱

عبارت‌های (آ) و (پ) درست‌اند. در مورد عبارت (پ) دقت کنید که در ابتدای یک دوره، شیب تغییرات شعاع اتمی بیشتر از انتهای دوره است. یعنی تفاوت بین شعاع اتمی عنصرهای فلزی متوالی بیشتر از تفاوت بین شعاع اتمی عنصرهای نافلزی متوالی است.





اگر به همین روش H_2SO_4 بریم، معادله موازنه شده واکنش (II) به صورت زیر خواهد بود:



بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: از دو روش می‌توان بازده درصدی واکنش را حساب کرد:

روش ۱: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{مول}} \Rightarrow \frac{160 \times \frac{R}{100}}{1 \times 32} = \frac{4/5}{1} \Rightarrow R = 90$$

روش ۲: استفاده از کسر تبدیل:

$$160 \text{ g S} \times \frac{1 \text{ mol S}}{32 \text{ g S}} \times \frac{1 \text{ mol H}_2\text{SO}_4}{1 \text{ mol S}} = \Delta \text{mol H}_2\text{SO}_4$$

$$\text{مقدار نظری} = \frac{\Delta \text{mol H}_2\text{SO}_4}{\text{مقدار عملی}} \times 100 = \frac{4/5}{5} \times 100 = 90\%$$

عبارت دوم: اسید مصرف شده در هر دو واکنش، HNO_3 است. فرآورده غیرگازی محلول در این واکنش‌ها به ترتیب H_2SO_4 و $\text{Cu(NO}_3)_2$ است. اگر جرم و در نتیجه تعداد مول یکسانی (مثلاً ۱ مول) HNO_3 در دو واکنش مصرف شود، خواهیم داشت:

روش ۱: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{x}{1 \times 98} \Rightarrow x = \frac{98}{6} = \frac{49}{3} \text{ g H}_2\text{SO}_4$$

$$\text{واکنش اول: } 6\text{HNO}_3 \sim \text{H}_2\text{SO}_4 \quad \text{واکنش دوم: } 8\text{HNO}_3 \sim 3\text{Cu(NO}_3)_2$$

$$\frac{1}{8} = \frac{x'}{3 \times 188} \Rightarrow x' = \frac{3 \times 188}{8} = \frac{3 \times 47}{2} = \frac{141}{2} \text{ g Cu(NO}_3)_2$$

عددهای $\frac{141}{2}$ و $\frac{49}{3}$ با هم برابر نیستند.

روش ۲: استفاده از کسر تبدیل:

$$m \text{ mol HNO}_3 \times \frac{1 \text{ mol H}_2\text{SO}_4}{6 \text{ mol HNO}_3} \times \frac{98 \text{ g H}_2\text{SO}_4}{1 \text{ mol H}_2\text{SO}_4} = \frac{49}{3} \text{ m g}$$

$$m \text{ mol HNO}_3 \times \frac{3 \text{ mol Cu(NO}_3)_2}{8 \text{ mol HNO}_3} \times \frac{188 \text{ g Cu(NO}_3)_2}{1 \text{ mol Cu(NO}_3)_2} = \frac{141}{2} \text{ m g}$$

$$\Rightarrow \frac{141}{2} m \neq \frac{49}{3} m$$

عبارت سوم: فرض می‌کنیم در واکنش اول، $\frac{4}{6}$ گرم NO_2 و در واکنش دوم، ۱ گرم NO تشکیل شده است.

روش ۱: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{4/6}{6 \times 46} = \frac{x}{1 \times 32} \Rightarrow x = \frac{32}{60} = \frac{8}{15} \text{ g S}$$

$$\text{واکنش اول: } 6\text{NO}_2 \sim \text{S} \quad \text{واکنش دوم: } 2\text{NO} \sim 3\text{Cu}$$

$$\frac{1}{2 \times 30} = \frac{x'}{3 \times 64} \Rightarrow x' = \frac{3}{2} \text{ g Cu}$$

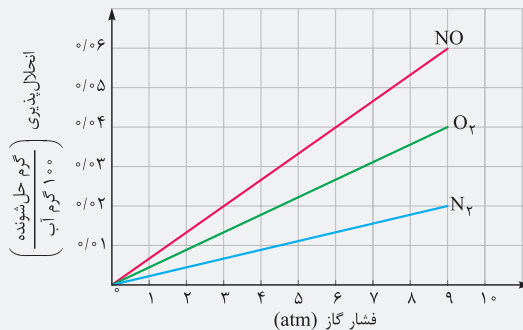
$$\frac{\text{Cu جرم}}{\text{S جرم}} = \frac{3/2}{8} = \frac{15 \times 32}{10 \times 8} = 6$$

روش ۲: استفاده از کسر تبدیل:

با توجه به فرض تشکیل $\frac{4}{6}$ گرم NO_2 در واکنش اول و ۱ گرم NO در واکنش دوم، داریم:

$$4/6 \text{ g NO}_2 \times \frac{1 \text{ mol NO}_2}{46 \text{ g NO}_2} \times \frac{1 \text{ mol S}}{6 \text{ mol NO}_2} \times \frac{32 \text{ g S}}{1 \text{ mol S}} = \frac{8}{15} \text{ g S}$$

توجه: هر گازی که انحلال پذیری بیشتری در آب دارد، تأثیر فشار بر انحلال پذیری آن بیشتر است؛ یعنی شیب نمودار انحلال پذیری بر حسب فشار برای آن بیشتر (تندتر) می‌باشد.

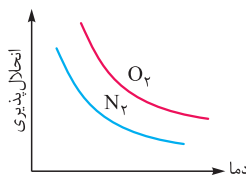


تأثیر فشار بر انحلال پذیری: $\text{NO} > \text{O}_2 > \text{N}_2$

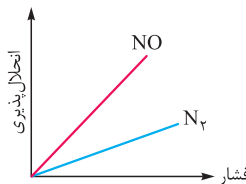
عبارت‌های اول و دوم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

با کاهش دما، انحلال پذیری گازها در آب افزایش می‌یابد. روند تغییر انحلال پذیری براساس دما، برای گازهای O_2 و N_2 مشابه و به صورت یک نمودار نزولی است.



هر چه گازی انحلال پذیری بیشتری در آب داشته باشد، تأثیر فشار بر انحلال پذیری آن نیز بیشتر است. (شیب نمودار انحلال پذیری - فشار آن بیشتر خواهد بود.)



گاز CO_2 با آب واکنش می‌دهد و انحلال پذیری بیشتری نسبت به گاز NO دارد.

O_2 و N_2 هر دو نافطی‌اند و O_2 جرم مولی بیشتری دارد؛ بنابراین انحلال پذیری گاز O_2 در آب بیشتر از گاز N_2 است.

۸۸ - گزینه ۴

استراتژی: برای قسمت اول سؤال، مقدار گرمایی که آب با دمای 9°C می‌گیرد رو با مقدار گرمایی که آب با دمای 35°C از دست می‌دهد، برابر قرار بده! برای قسمت دوم سؤال هم از رابطه $Q = mc\Delta\theta$ استفاده کن!

گام ۱: مقدار گرمایی که آب با دمای 9°C می‌گیرد را با مقدار گرمایی که آب با دمای 35°C از دست می‌دهد، برابر قرار می‌دهیم. با توجه به این که چگالی آب 1 g.mL^{-1} است، حجم آب بر حسب میلی‌لیتر با جرم آن بر حسب گرم برابر است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow Q_1 = -Q_2 \Rightarrow m \times 4/2 \times (19 - 9) = -[75 \times 4/2 \times (19 - 35)]$$

$$\Rightarrow 10 \text{ m} = 75 \times 16 \Rightarrow m = 120 \text{ g}$$

گام ۲: گرمای مورد نیاز برای افزایش دمای مخلوط را حساب می‌کنیم.

جرم مخلوط حاصل، $75 + 120 = 195$ گرم است:

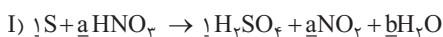
$$Q = 195 \times \frac{4}{2} \times (44 - 19) = 195 \times 2 \times \frac{25}{2} = 195 \times 25 = 4875 \text{ J} = 4.875 \text{ kJ}$$

مقدار Q اندکی از 4.875 kJ بزرگ‌تر است که با توجه به گزینه‌ها می‌شه 4.75 kJ !

۸۹ - گزینه ۳

عبارت‌های اول، سوم و چهارم درست‌اند.

اول معادله موازنه شده واکنش‌ها:



موازنه H : $a = 2 + 2b$

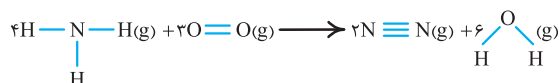
$$\text{موازنه O: } 3a = 4 + 2a + b \Rightarrow \begin{cases} a - 2b = 2 \\ a - b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 2 \end{cases}$$



۹۱- گزینه

نکته استراتژی ابتدا به کمک آنتالپی پیوندها، ΔH واکنش اول رو به صورتی که آب در آن به حالت گاز است، حساب کن و بعد به کمک قانون هس، ΔH واکنش خواسته شده (که آب در آن مایع است) رو به دست بیا! قسمت دوم سؤال هم به محاسبه ساده‌ست و باید ΔH محاسبه شده مرحله اول رو به ۲۵ تقسیم کنی!

گام ۱ ΔH واکنش را در حالتی که آب به صورت گاز است، حساب می‌کنیم.



نکته

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = \left[\text{مجموع آنتالپی پیوندها} \right] - \left[\text{مجموع آنتالپی پیوندها} \right]$$

$$\left[\text{در مواد واکنش دهنده} \right] - \left[\text{در مواد فراورده} \right]$$

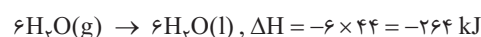
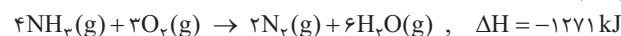
$$\Rightarrow \Delta H = [12\Delta H(\text{N}-\text{H}) + 3\Delta H(\text{O}=\text{O})]$$

$$- [2\Delta H(\text{N} \equiv \text{N}) + 12\Delta H(\text{O}-\text{H})]$$

$$= [(12 \times 390) + (3 \times 495)] - [(2 \times 940) + (12 \times 463)] = 6165 - 7436$$

$$= -1271 \text{ kJ}$$

گام ۲ به کمک قانون هس، ΔH واکنش را در حالتی که آب به صورت مایع است، حساب می‌کنیم:



$$\Delta H(\text{کلی}) = -1271 - 264 = -1535 \text{ kJ}$$

گام ۳ باید ببینیم با ۱۵۳۵ kJ گرما چند مول FeO را می‌توان به Fe تبدیل کرد.

با توجه به معادله داده شده، برای تبدیل ۱ مول FeO به Fe، ۲۵ kJ گرما لازم است:

$$1535 \text{ kJ} \times \frac{1 \text{ mol FeO}}{25 \text{ kJ}} = 61/4 \text{ mol FeO}$$

تیزبازی با توجه به داده‌های سؤال، نسبت قسمت اول و دوم پاسخ برابر ۲۵ می‌شود که با این حساب گزینه‌های ۳ و ۴ حذف می‌شن و برای رسیدن به پاسخ درست محاسبه ΔH واکنش اول؛ یعنی قسمت اول سؤال کافی است.

مشاوره به طور کلی سؤالات مربوط به محاسبه ΔH واکنش به کمک آنتالپی‌های پیوند، سؤالات وقت‌گیری هستند و سر جلسه کنکور، باید بذاریشون برای آخر کار!

۹۲- گزینه

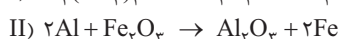
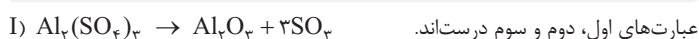
نکته استراتژی اول با توجه به اطلاعات داده شده، سرعت تولید Al_2O_3 در دو واکنش را حساب کن و بعد با خیال راحت، برو سراغ بررسی عبارت‌ها!

نکته سرعت تولید یا مصرف مواد در یک واکنش شیمیایی با نسبت ضرایب استوکیومتری آن‌ها رابطه مستقیم دارد.



$$\frac{\bar{R}(\text{A})}{a} = \frac{\bar{R}(\text{B})}{b} = \frac{\bar{R}(\text{C})}{c} = \frac{\bar{R}(\text{D})}{d}$$

اگر ضریب استوکیومتری دو ماده با هم برابر باشد، سرعت تولید یا مصرف آن‌ها با هم برابر خواهد بود.



قبل از این که بریم سراغ عبارت‌ها، بیایید سرعت تولید Al_2O_3 در دو واکنش را حساب کنیم:

$$\Delta t = 180 \text{ s} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 3 \text{ min}$$

I) در واکنش $\bar{R}(\text{Al}_2\text{O}_3) = \frac{3/2 \text{ mol}}{3 \text{ min}}$

II) در واکنش $\bar{R}(\text{Al}_2\text{O}_3) = 3 \times \frac{3/2}{3} = 3/2 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$

$$\text{در واکنش دوم: } 1 \text{ g NO} \times \frac{1 \text{ mol NO}}{30 \text{ g NO}} \times \frac{3 \text{ mol Cu}}{2 \text{ mol NO}} \times \frac{64 \text{ g Cu}}{1 \text{ mol Cu}} = 3/2 \text{ g Cu}$$

عبارت چهارم: ابتدا درصد خلوص مس را حساب می‌کنیم:

روش ۱ استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{درصد خلوص}}{100} = \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{84 \times \frac{x}{100}}{3 \times 64} = \frac{1/5}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{64 \times 1/5}{84} = 80$$

روش ۲ استفاده از کسر تبدیل:

$$84 \text{ g Cu} \times \frac{x \text{ g Cu}}{100 \text{ g Cu}} \times \frac{1 \text{ mol Cu}}{64 \text{ g Cu}} \times \frac{3 \text{ mol Cu}(\text{NO}_3)_2}{2 \text{ mol Cu}}$$

$$= 1/5 \text{ mol Cu}(\text{NO}_3)_2 \Rightarrow x = \frac{1/5 \times 100 \times 64 \times 3}{84 \times 3} = 80$$

درصد خلوص نمونه ۸۰٪ است؛ بنابراین ناخالصی آن ۲۰٪ می‌باشد.

مشاوره در این جا با یک سؤال شمارشی و محاسباتی به شدت وقت‌گیر روبه‌رو بودیم که سر جلسه اصلاً منطقی نیست در دور اول بریم سراغش! مطمئن باش درصد بالایی از بچه‌ها در زمان قانونی، نمی‌تونن به این سؤال جواب بدن! پس با خیال راحت، رهاش کن و آخر سر، اگر وقت اضافه داشتی، بیا سراغش!

۹۰- گزینه

نکته اگر نام یک آلکان را داشته باشیم، بدون رسم ساختار آن، می‌توانیم شمار اتم‌های کربن آن را به دست آوریم. تعداد اتم‌های کربن در مولکول یک آلکان برابر با مجموع تعداد اتم‌های کربن زنجیر اصلی و تعداد اتم‌های کربن شاخه‌های فرعی است. با توجه به نام زنجیر اصلی و پیشوندها، می‌توان تعداد کربن زنجیر اصلی و شاخه‌ها را به دست آورد:

پیشوند	پنت	هگز	هپت	اوکت	نون	دک
تعداد کربن	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰

در نام‌گذاری آلکان‌هایی با بیش از یک شاخه فرعی، تعداد شاخه‌ها نیز با پیشوند بیان می‌شوند که برای شمردن کربن‌ها باید *هواسمون* به این پیشوندها هم باشه!

پیشوند	دی	تری	تترا
معنی	دو	سه	چهار

مثال: ۴، ۳ - دی‌اتیل - ۲ - متیل هپتان، ۱۲ اتم کربن دارد.

۴، ۳ - دی‌اتیل - ۲ - متیل هپتان

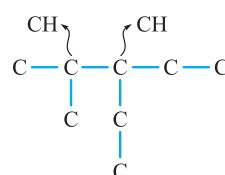
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\underbrace{4 + 3 + 2 = 9}_{\text{کربن}} \quad \underbrace{2 \times 2 = 4}_{\text{کربن}} \quad \underbrace{1}_{\text{کربن}}$$

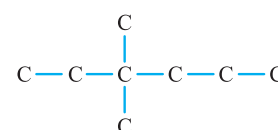
$$9 + 4 + 1 = 14$$

مولکول‌های (آ)، (پ) و (ت) جزء آلکان‌های ۸ کربنی هستند، در حالی که مولکول (ب) یک آلکان ۷ کربنی است؛ بنابراین ۱ و ۲ پُر!

حالا با توجه به گزینه‌ها، باید ببینیم در کدام یک از مولکول‌های (پ) یا (ت) دو گروه CH (کربن متصل به ۳ اتم کربن دیگر) وجود دارد:



(ت) ۳ - اتیل، ۲ - متیل پنتان



(پ) ۳، ۳ - دی‌متیل هگزان



گام ۳ با توجه به pH محلول HA، $[H_3O^+]$ در محلول HA را حساب کرده و سپس به کمک نسبت $\frac{[H_3O^+](HA)}{[H_3O^+](HD)}$ ، $[H_3O^+]$ در محلول HD و pH آن را حساب می‌کنیم. همچنین pH محلول KOH را به دست آورده و در آخر، نسبت pH محلول HD به pH محلول KOH را حساب می‌کنیم.

$$\frac{[H_3O^+](HA)}{[H_3O^+](HD)} = 2/5 \Rightarrow [H_3O^+](HD) = \frac{10^{-4}}{2/5} = 4 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pH(HD) = -\log[H_3O^+] = -\log(4 \times 10^{-5}) = 5 - \log 4$$

$$= 5 - 2\log 2 = 5 - 2(0.3) = 4.4$$

در محلول باز قوی پتاسیم هیدروکسید (KOH)، غلظت OH^- با غلظت محلول، یکسان و برابر با 10^{-2} مولار است:

$$[H_3O^+][OH^-] = 10^{-14} \Rightarrow [H_3O^+] = \frac{10^{-14}}{10^{-2}} = 10^{-12} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pH = -\log[H_3O^+] = -\log(10^{-12}) = 12$$

$$\frac{pH(HD)}{pH(KOH)} = \frac{4.4}{12} \approx 0.37$$

تیزبازی در دمای اتاق، pH محلول اسیدها کوچک‌تر از ۷ و pH محلول بازها بزرگ‌تر از ۷ است؛ بنابراین نسبت pH محلول HD به pH محلول KOH باید کوچک‌تر از ۱ باشد؛ یعنی قسمت دوم سؤال، اصلاً نیازی به حل نداشت!

۱۰۰- گزینه ۴

گام ۱ معادله واکنش را موازنه می‌کنیم: $2HBr + Ba(OH)_2 \rightarrow 2H_2O + BaBr_2$

گام ۲ از جرم HBr به مول Ba^{2+} و غلظت مولی محلول $BaBr_2$ می‌رسیم.

روش استفاده از کسر تناسب

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}}$$

$$\Rightarrow \frac{5/4}{1 \times 137} = \frac{x}{1 \times 137} = \frac{x' \times 0.15}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{0.1 \times 137}{3} = \frac{13.7}{3} \approx 4.56 \text{ g Ba}^{2+} \\ x' = \frac{0.1}{0.45} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9} \approx 0.22 \text{ mol.L}^{-1} \end{cases}$$

روش استفاده از کسر تبدیل

$$Ba^{2+} \text{ جرم} = 5/4 \text{ g HBr} \times \frac{1 \text{ mol HBr}}{81 \text{ g HBr}} \times \frac{1 \text{ mol Ba}^{2+}}{2 \text{ mol HBr}} \times \frac{137 \text{ g Ba}^{2+}}{1 \text{ mol Ba}^{2+}} = 4.56 \text{ g Ba}^{2+}$$

$$BaBr_2 \text{ مول} = 5/4 \text{ g HBr} \times \frac{1 \text{ mol HBr}}{81 \text{ g HBr}} \times \frac{1 \text{ mol BaBr}_2}{2 \text{ mol HBr}} = \frac{1}{3} \text{ mol BaBr}_2$$

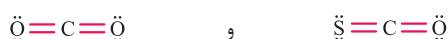
$$\text{غلظت مولی} = \frac{1 \text{ mol}}{\frac{15}{100} \text{ L}} = \frac{100}{15} = \frac{20}{3} \approx 6.67 \text{ mol.L}^{-1}$$

۱۰۱- گزینه ۱

عبارت‌های (آ) و (ب) درست‌اند.

(آ) فرمول مولکولی کربونیل سولفید و استیک اسید به ترتیب به صورت SCO و $C_2H_4O_2$ (CH₃COOH) است. جرم مولی هر دو ترکیب، ۶۰ گرم بر مول است.

(ب) هر دو مولکول CO₂ و SCO، ساختار خطی دارند.



(پ) در ساختار SCO، ۴ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

(ت) در ساختار SCO، ۴ جفت الکترون پیوندی (پیوند اشتراکی) و در ساختار اتین (H-C≡C-H)، ۵ جفت الکترون پیوندی وجود دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها: ۱ هر اتم اکسیژن دارای ۲ جفت الکترون ناپیوندی و هر اتم نیتروژن دارای ۱ جفت الکترون ناپیوندی است؛ بنابراین ترکیب داده‌شده در مجموع دارای $12 = (2 \times 1) + (5 \times 2)$ جفت الکترون ناپیوندی است، در حالی که این ترکیب، ۱۳ اتم کربن دارد.

۳ در ساختار داده‌شده، ۴ پیوند دوگانه کربن - کربن (C=C) و یک گروه کربوکسیل (COOH) وجود دارد.

۴ در ساختار ترکیب مورد نظر، ۹ پیوند C-C و ۴ پیوند C-O وجود دارد.

۹۷- گزینه ۲

نکته در دما و غلظت یکسان، هر چه ثابت یونش (K_a) یک اسید بیشتر باشد:

اسید قوی‌تر است.

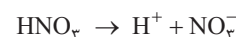
بیشتر یونیده شده و $[H^+]$ در محلول اسید بیشتر است.

رسانایی الکتریکی محلول اسید بیشتر است.

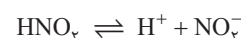
سرعت واکنش محلول اسید با یک فلز معین، بیشتر است.

pH محلول اسید کم‌تر است.

نیترو اسید (HNO₃) یک اسید ضعیف و نیتریک اسید (HNO₂) یک اسید قوی است:



$$m_1 = 0.1 \text{ mol NO}_2^- \times \frac{62 \text{ g NO}_2^-}{1 \text{ mol NO}_2^-} = 6.2 \text{ g NO}_2^-$$



$$m_2 < 0.1 \text{ mol NO}_2^- \times \frac{62 \text{ g NO}_2^-}{1 \text{ mol NO}_2^-} \Rightarrow m_2 < 6.2 \text{ g}$$

جرم NO₂⁻ برابر با ۶/۲ گرم و جرم NO₂⁻ کم‌تر از ۴/۶ گرم است؛ بنابراین تفاوت جرم آن‌ها قطعاً بیشتر از ۱/۶ گرم (۶/۲ - ۴/۶ = ۱/۶) می‌باشد.

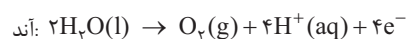
بررسی سایر گزینه‌ها: ۱ غلظت یون هیدرونیوم در محلول اسید قوی‌تر (نیتریک اسید)

بیشتر است؛ بنابراین سرعت واکنش این محلول با فلز منیزیم بیشتر است. ۳ HNO₂ به طور کامل در آب یونیده نمی‌شود و در محلول آن، مولکول‌های یونیده‌نشده اسید هم وجود دارد، در حالی که در محلول اسید قوی HNO₃، خبری از مولکول‌های یونیده‌نشده اسید نیست. ۴ در دما و غلظت یکسان، pH محلول اسید قوی‌تر (HNO₃) کم‌تر است.

۹۸- گزینه ۳

عبارت‌های (پ) و (ت) درست‌اند.

(آ) در برقکافت آب، در آند گاز اکسیژن آزاد می‌شود.



(ب) اتم‌های کلر و برم، تمایل به گرفتن الکترون دارند و نه از دست دادن الکترون! در ضمن خصلت نافلزی کلر از برم بیشتر است و در رقابت برای گرفتن الکترون، برنده است.

(پ) و (ت) هر چه E^o گونه‌ای کم‌تر باشد (کاهنده قوی‌تری باشد)، زودتر در آند اکسایش می‌یابد و هر چه E^o گونه‌ای بیشتر باشد، (اکسنده قوی‌تری باشد)، زودتر در کاتد کاهش می‌یابد.

۹۹- گزینه ۱

نکته اگر غلظت اولیه محلول یک اسید ضعیف، M مولار باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$[H_3O^+] = M\alpha$$

↓
درجه یونش اسید

گام ۱ نسبت $[H_3O^+]$ دو محلول را حساب می‌کنیم.

$$[H_3O^+] = M\alpha$$

$$\xrightarrow{M_{HA}=M_{HD}} \frac{[H_3O^+](HA)}{[H_3O^+](HD)} = \frac{\alpha(HA)}{\alpha(HD)} = \frac{\lambda}{3/2} = 2/5$$



همان طور که در (۴) می بینید، تارسیدن به تعادل، غلظت NO، $4/6$ مولار ($4/6 = 4/6 - 0 = 4$) و غلظت هر یک از گازهای N_2 و O_2 ، $2/3$ مولار ($2/3 = 2/3 - 4/6 = 2/3$) تغییر کرده است.

نکته در این سؤال، کاری به ثابت تعادل و محاسبات آن نداشتیم، اما اگر در سؤالی، نسبت تغییرات غلظت مواد در چند گزینه، متناسب با ضرایب استوکیومتری شان بود، باید با استفاده از ثابت تعادل، غلظت تعادلی آن ها را حساب می کردیم:

$$2NO \rightleftharpoons N_2 + O_2$$

$$K = \frac{[N_2][O_2]}{[NO]^2} = \frac{x^2}{(5-2x)^2} = 49$$

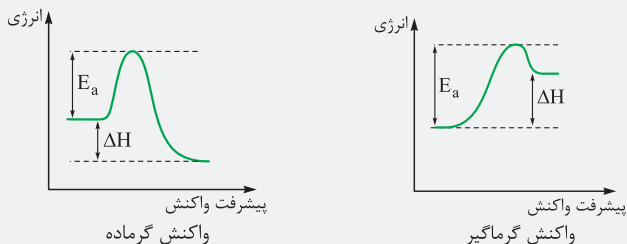
غلظت اولیه: $\frac{1}{2} = 5$ x x

غلظت تعادلی: $5-2x$ x x

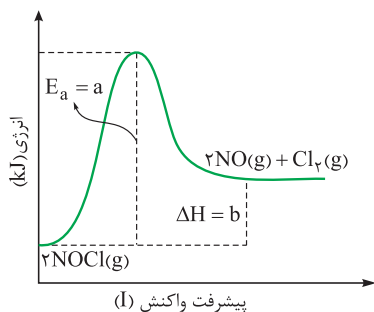
$$\Rightarrow \frac{x}{5-2x} = 7 \Rightarrow 35 - 14x = x \Rightarrow 15x = 35 \Rightarrow x = 2/3$$

۱۰۵ - گزینه ۲

نکته در نمودار انرژی - پیشرفت واکنش، تفاوت سطح انرژی واکنش دهنده ها و قله، انرژی فعال سازی (E_a) واکنش و تفاوت سطح انرژی واکنش دهنده ها و فرآورده ها آنتالپی (ΔH) واکنش را نشان می دهد.

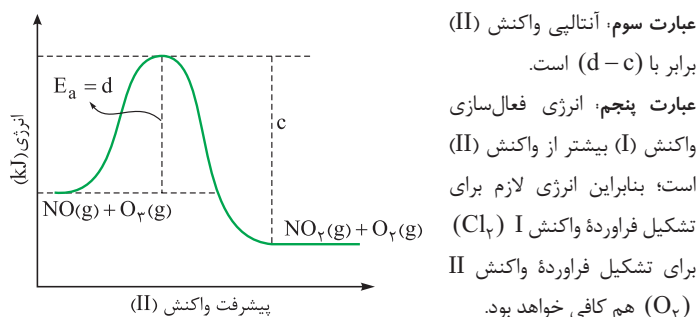


- ۲) در شرایط یکسان، هر چه انرژی فعال سازی واکنش کم تر باشد، سرعت آن واکنش بیشتر است.
- ۳) کاتالیزگر مناسب، با استفاده از کاهش انرژی فعال سازی، سرعت واکنش را افزایش می دهد.
- ۴) با استفاده از کاتالیزگر، مقدار آنتالپی واکنش (ΔH) تغییری نمی کند.



عبارت های اول، چهارم و پنجم درست اند. واکنش II (d) کم تر از انرژی فعال سازی واکنش I (a) است و می توان گفت که در شرایط یکسان، سرعت واکنش (II) بیشتر و تشکیل فرآورده ها در آن آسان تر است.

عبارت دوم، با استفاده از کاتالیزگر، انرژی فعال سازی (a) کاهش می یابد، در حالی که آنتالپی واکنش (b) تغییر نمی کند؛ بنابراین مقدار (a - b) کاهش می یابد.



عبارت سوم، آنتالپی واکنش (II) برابر با (d - c) است. عبارت پنجم، انرژی فعال سازی واکنش (I) بیشتر از واکنش (II) است؛ بنابراین انرژی لازم برای تشکیل فرآورده واکنش I (Cl_2) برای تشکیل فرآورده واکنش II (O_2) هم کافی خواهد بود.

تیزبازی با مشخص شدن درستی عبارت (آ)، (۲) و (۴) پُر! عبارت های (آ) و (ب) بین (۱) و (۳) مشترک اند، پس فقط کافیه که عبارت (پ) رو بررسی کنی و به جواب برسی.

۱۰۲ - گزینه ۴

نکته شمار الکترون های مبادله شده در واکنش های اکسایش - کاهش را می توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\text{تغییر عدد اکسایش} \times (\text{شمار اتم ها در اکسایش}) \times (\text{ضریب در اکسایش}) = \text{شمار الکترون های اتم در اکسایش}$$

$$\text{تغییر عدد اکسایش} \times (\text{شمار اتم ها در اکسایش}) \times (\text{ضریب در اکسایش}) = \text{شمار الکترون های اتم در اکسایش}$$

معادله موازنه شده واکنش به صورت زیر است:



اکسید کاهنده
مجموع ضرایب $= 4 + 3 + 2 = 9$

شمار اتم ها در اکسید $\times$ ضریب اکسید (Fe) = شمار الکترون های مبادله شده
 $= 4 \times 1 \times 3 = 12$

۱۰۳ - گزینه ۱

نکته شعاع اتمی یک فلز با تبدیل شدن به کاتیون، کاهش می یابد:
شعاع اتم فلزی < شعاع کاتیون
شعاع اتمی یک نافلز با تبدیل شدن به آنیون، افزایش می یابد:
شعاع اتم نافلزی > شعاع آنیون

عبارت های (آ) و (ت) درست اند.
(آ) فلزها کاتیون تشکیل می دهند و شعاع یک کاتیون، کوچک تر از شعاع اتم فلز اولیه است.
(ب) پُر! نتونم؟! مثلاً a می تواند سدیم و c می تواند گوگرد باشد.
(پ) شعاع یون پایدار یک نافلز (آنیون) از شعاع اتم نافلز اولیه بزرگ تر است.
(ت) بله! مثلاً a و c اگر به ترتیب منیزیم و گوگرد باشند، فرمول ترکیب یونی حاصل از آن ها MgS است.

تیزبازی عبارت (آ) تابلوه که درست! پس (۳) و (۴) پُر! عبارت های (آ) و (ت) در (۱) و (۲) مشترک اند و فقط کافیه که عبارت (ب) رو بررسی کنی و تمام!

۱۰۴ - گزینه ۴

نکته در یک واکنش گازی، با گذشت زمان از غلظت واکنش دهنده (ها) کاسته شده و بر غلظت فرآورده (ها) افزوده می شود. به عبارت دیگر نمودار غلظت - زمان واکنش دهنده (ها) نزولی و نمودار غلظت - زمان فرآورده (ها) صعودی است. در ضمن قدرمطلق شیب نمودار غلظت - زمان مواد با ضرایب استوکیومتری آن ها متناسب است؛ به طور مثال در واکنش فرضی $2A(g) \rightarrow B(g)$ ، ضریب A دو برابر B است؛ بنابراین قدرمطلق شیب نمودار غلظت - زمان آن باید دو برابر B باشد. به عبارت دیگر در بازه زمانی یکسان، میزان تغییرات غلظت A باید دو برابر B باشد.

از اون هایی که واکنش با NO آغاز شده و ضرایب استوکیومتری N_2 و O_2 با هم برابر است، تغییرات غلظت N_2 و O_2 کاملاً مشابه بوده و نمودار آن ها روی هم می افتد. تا همین جا (۱) و (۲) پُر! طبق معادله واکنش، تغییر غلظت NO باید دو برابر تغییر غلظت هر یک از گازهای N_2 و O_2 باشد.